

## 最小交差数4の二次元リボン結び目 IV

安田 智之

Ribbon 2-knots with ribbon crossing number four. IV.

Tomoyuki YASUDA

二次元リボン結び目は、 $m$ 個の二次元球面からなる自明な二次元絡み目に対して、 $m - 1$ 個の二次元円環領域を繋げることによって得られる二次元球面のことで、ふつうは四次元ユークリッド空間内でこれを考える。二次元リボン結び目  $K^2$  のひとつの構成法を示すこの表示のことを  $K^2$  のリボン表示という。

また、リボン表示において二次元円環領域が自明な二次元絡み目と交差する回数のことを、そのリボン表示のリボン交差数というが、 $K^2$  のすべてのリボン表示を考えたときのリボン交差数の最小数は  $K^2$  の最小交差数とよばれる。これは二次元リボン結び目の複雑さをはかる重要な概念であり、[1] で初めて導入された。[1] においては最小交差数が3以下の二次元リボン結び目は17個しか存在しないことが示され、それぞれに対して最小交差数を実現するリボン表示が与えられた。更に、[2], [3] においては最小交差数が4の二次元リボン結び目のうちで、「2個の二次元球面と1個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示が最小交差数4を実現するもの」が調べられ、更にはそれらを除き「3個の二次元球面と2個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示が最小交差数4を実現するもの」が調べられている。結果、これらは合わせて高々56個しか存在しないことが判っている。また、[4] ではこれら56個を除いた上で、「4個の二次元球面と3個の二次元円環領域を繋げる事によって得られるリボン表示が最小交差数4を実現するもの」を調べられている。結果、これらは高々35個しか存在しないことが判っている。

今回は以上の先行研究で調べられた91個を除き、「5個の二次元球面と4個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示が最小交差数4を実現するもの」を調べた。結果、これらは高々21個しか存在しない事が分かった。この事実から、最小交差数4を持つ二次元リボン結び目は高々112個しか存在しない事が結論される。

### 1. 緒 論

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間において  $m$  個の二次元球面を  $m - 1$  個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成される二次元球面である。自明でない二次元球面として二次元リボン結び目が発見されて以来、ひとつの二次元リボン結び目を構成するのにどんな方法があるか、また本質的に何種類の方法があるのか、という問題に関心がもたれてきた。

この問題の解決に迫る一つの方法として二次元リボン結び目の最小交差数を決定するという方法がある。ここで最小交差数とは以下のように決められる二次元リボン結び目の不変量である。 $K^2$  を構成するための、自明な二次元絡み目と二次元円環領域との対のことを  $K^2$  のリボン表示という。リボン表示  $\mathcal{R}$  において、これを構

成する円環領域が球面と交差する回数のことを  $\mathcal{R}$  のリボン交差数といい、 $cr(\mathcal{R})$  で表される。ここで  $K^2$  のすべてのリボン表示を考えたとき、そのリボン交差数の最小数が  $K^2$  の最小交差数である。これは  $cr(K^2)$  で表される。

二次元リボン結び目に関する最小交差数の概念は [1] において初めて導入された。そうして [5] では最小交差数を評価する方法のひとつが導入され、トールス結び目のスパン結び目として構成される二次元リボン結び目はすべて最小交差数が決定されることになった。また最小交差数を基準とした二次元リボン結び目の分類問題に関して言えば、[1] において、最小交差数が3以下の二次元リボン結び目がすべて決定され、総数は17個であることが示された。また、それらの最小交差数を実現するリボン表示も示されている。更に [2], [3], [4] では最小

交差数が4の二次元リボン結び目のうち、「2個の二次元球面を1個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が最小交差数4を実現するもの」、「3個の二次元球面を2個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が最小交差数4を実現するもの」、更に「4個の二次元球面を3個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が交差数4を実現するもの」が調べられている。これらの総数は高々91個である。本論文では次のことを示す。

**補題** 最小交差数4の二次元リボン結び目のうち4ベースリボン表示が最小交差数を実現するものは [1], [2], [3], [4] に掲載されたものを除けば高々21個である。これにより、次のことが結論される。  
**定理** 最小交差数が4の二次元リボン結び目の個数は高々112個である。

## 2. 準備

### 2.1 定義 ([1])

$\{D_\mu^3 \mid \mu = 1, 2, \dots, m\}$  を互いに交わらない四次元ユークリッド空間  $R^4$  内の三次元球体の族とする。また、 $\partial D_\mu^3 = O_\mu^2$  とおく。

一方、 $f_{i_j r} : D^2 \times I \rightarrow R^4$  ( $r=1, 2, \dots, m-1; i_r, j_r = 1, 2, \dots, m$ ) を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質 (1)、(2) を満たすものとする。但し  $D^2$  は二次元球体、 $I = [0, 1]$  である。

$$(1) f_{i_j r} (D^2 \times I) \cap O_\mu^2 = \begin{cases} f_{i_j r} (D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f_{i_j r} (D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$(2) (\cup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)) \cap (\cup_{\mu=1}^m O_\mu^2) \text{ は連結}$$

ここで  $K^2$  を二次元球面

$$(\cup_{\mu=1}^m O_\mu^2) \cup (\cup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)) - \overset{\circ}{T}$$

とする。但し

$T = \cup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)$  であり  $\overset{\circ}{T}$  は  $T$  の内部を表す。この時、 $K^2$  のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

### 2.2 定義 ([1])

$\sigma = \cup_{\mu=1}^m D_\mu^2$ ,  $\mathcal{B} = \cup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)$  とおくと  $(\sigma, \mathcal{B})$  のことを二次元リボン結び目  $K^2$  に対する  $m$  ベースリボン表示 (或いは単にリボン表示) と呼ぶ。また  $\sigma$  をベース、 $\mathcal{B}$  をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目  $K^2$  に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを  $K^2$  のベース指数と呼び  $b(K^2)$

で表す。このとき  $K^2$  は  $b(K^2)$  ベース二次元リボン結び目であるという。

### 2.3 定義 ([1])

$\varrho_r = f_{i_j r} (\{0\} \times I)$  ( $r=1, 2, \dots, m-1$ ) とおく。但し、 $\{0\}$  は  $D^2$  の中心点である。ここで各  $\varrho_r$  が  $\sigma$  に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各  $\varrho_r$  の方向に従って  $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs_r}$  とし  $(\sigma, \mathcal{B})$  のリボン交差と呼ぶ。但し各  $\varrho_r$  の方向が  $O_i^2$  から  $O_j^2$  へ向かう方向とする。この時  $n = \sum_{r=1}^m s_r$  をリボン表示のリボン交差数と呼び、 $(\sigma, \mathcal{B})$  は  $n$  交差リボン表示であるという。そうして  $K^2$  に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことを  $K^2$  の最小交差数 (或いは単に交差数) と呼び  $cr(K^2)$  で表す。

### 2.4 定義

$a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs_r}$  に対応して、 $s_r$  個の文字からなる語  $w_r$  をつくる。つくり方は  $\varrho_r$  が  $D_\mu^3$  に点  $a_{rv}$  ( $v=1, 2, \dots, s_r$ ) で正の側から交わる時、 $w_r$  の  $v$  番目の文字を  $x_\mu$ 、負の側から交わる時は同様  $x_\mu^{-1}$  とするものとする。このようにしてつくられた語  $w_1, w_2, \dots, w_{m-1}$  を利用して  $K^2$  の結び目群  $\pi_1(R^4 - K^2)$  の群表示を次の様に構成できる。

$$(*1) [ x_\mu ; \mu=1, 2, \dots, m \mid x_i w_r x_j^{-1} w_r^{-1} ; r=1, 2, \dots, m-1 ]$$

但し各  $x_\mu$  は  $O_\mu^2$  のメリディアン生成元とする ([6])。以上の様な構成法でリボン表示  $(\sigma, \mathcal{B})$  から得られた群表示 (\*1) のことを  $(\sigma, \mathcal{B})$  に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各  $w_r$  のことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示 (\*1) からは、逆の手順でリボン表示  $(\sigma, \mathcal{B})$  を定められるので  $(\sigma, \mathcal{B})$  のことをリボン群表示 (\*1) に関連したリボン表示と呼ぶ。

## 3. 補題の証明

最小交差数4のリボン結び目のうち、5ベースリボン表示が最小交差数4を実現するものを列挙する。但し、ベースの繋がり方により、以下のように (i), (ii) の2つのタイプに分けてそれを行う。

(i) 次のリボン群表示  $G_j$  に関連したリボン表示を  $\mathcal{R}_j$  とする。

$$G_j = [ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1 w_{j1} x_1^{-2} w_{j1}^{-1}, x_1 w_{j2} x_1^{-3} w_{j2}^{-1}, x_1 w_{j3} x_1^{-4} w_{j3}^{-1}, x_2 w_{j4} x_1^{-5} w_{j4}^{-1} ]$$

ここで  $w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}$  は10種の文字  $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}$

,  $x_3, x_3^{-1}, x_4, x_4^{-1}, x_5, x_5^{-1}$  のいずれかでつくられる各々1文字の語である。ここで10個の文字の優先順位をこの順であるとする。 $w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}$  を繋げた4文字の語を辞書式順序ですべて並べ、[1], [2], [3], [4] において列挙されたりボン表示と同じ二次元リボン結び目を表すリボン表示を省くと、次の16個が残る。

$$\begin{aligned} W_{92} &= x_5, x_2, x_3, x_4 \\ W_{93} &= x_5, x_2, x_3, x_4^{-1} \\ W_{94} &= x_5, x_2, x_3^{-1}, x_4 \\ W_{95} &= x_5, x_2, x_3^{-1}, x_4^{-1} \\ W_{96} &= x_5, x_2^{-1}, x_3, x_4 \\ W_{97} &= x_5, x_2^{-1}, x_3, x_4^{-1} \\ W_{98} &= x_5, x_2^{-1}, x_3^{-1}, x_4 \\ W_{99} &= x_5, x_2^{-1}, x_3^{-1}, x_4^{-1} \\ W_{100} &= x_5^{-1}, x_2, x_3, x_4 \\ W_{101} &= x_5^{-1}, x_2, x_3, x_4^{-1} \\ W_{102} &= x_5^{-1}, x_2, x_3^{-1}, x_4 \\ W_{103} &= x_5^{-1}, x_2, x_3^{-1}, x_4^{-1} \\ W_{104} &= x_5^{-1}, x_2^{-1}, x_3, x_4 \\ W_{105} &= x_5^{-1}, x_2^{-1}, x_3, x_4^{-1} \\ W_{106} &= x_5^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1}, x_4 \\ W_{107} &= x_5^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1}, x_4^{-1} \end{aligned}$$

一方、各  $G_j$  に対して [7] における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示  $\mathcal{R}_j$  の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式  $\Delta_j \pmod{\pm t^a}$  が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \Delta_{92} &= -1 + 4t - 5t^2 + 3t^3 \\ \Delta_{93} &= 1 - 4t + 6t^2 - 2t^3 \\ \Delta_{94} &= 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4 \\ \Delta_{95} &= 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4 \\ \Delta_{96} &= 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4 \\ \Delta_{97} &= -1 + 4t - 4t^2 + 3t^3 - t^4 \\ \Delta_{98} &= 3 - 5t + 4t^2 - t^3 \\ \Delta_{99} &= 1 - 2t + 5t^2 - 4t^3 + t^4 \\ \Delta_{100} &= 1 - 4t + 5t^2 + 2t^3 - t^4 \\ \Delta_{101} &= -1 + 4t - 5t^2 + 3t^3 \\ \Delta_{102} &= -1 + 3t - 4t^2 + 4t^3 - t^4 \\ \Delta_{103} &= 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4 \\ \Delta_{104} &= 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4 \\ \Delta_{105} &= 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4 \\ \Delta_{106} &= -2 + 6t - 4t^2 + t^3 \\ \Delta_{107} &= 3 - 5t + 4t^2 - t^3 \end{aligned}$$

従って (i) のタイプ に該当するリボン表示が最小交差数を実現する二次元リボン結び目は16個である。

但し、 $\mathcal{R}_{92}$  と  $\mathcal{R}_{107}$ ,  $\mathcal{R}_{93}$  と  $\mathcal{R}_{106}$ ,  $\mathcal{R}_{94}$  と  $\mathcal{R}_{105}$ ,

$\mathcal{R}_{95}$  と  $\mathcal{R}_{104}$ ,  $\mathcal{R}_{96}$  と  $\mathcal{R}_{103}$ ,  $\mathcal{R}_{97}$  と  $\mathcal{R}_{102}$ ,  $\mathcal{R}_{98}$  と  $\mathcal{R}_{101}$ ,  $\mathcal{R}_{99}$  と  $\mathcal{R}_{100}$ , はそれぞれ互いに鏡像の関係にある。

(ii) 次のリボン群表示  $G_j$  に関連したりボン表示を  $\mathcal{R}_j$  とする。

$$G_j = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1 w_{j1} x_2^{-1} w_{j1}^{-1}, x_1 w_{j2} x_3^{-1} w_{j2}^{-1}, x_1 w_{j3} x_4^{-1} w_{j3}^{-1}, x_1 w_{j4} x_5^{-1} w_{j4}^{-1}]$$

ここで  $w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}$  は10種の文字  $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}, x_4, x_4^{-1}, x_5, x_5^{-1}$  のいずれかでつくられる各々1文字の語である。ここで10個の文字の優先順位をこの順であるとする。 $w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}$  を繋げた4文字の語を辞書式順序ですべて並べ、[1], [2], [3], [4], および上述の (i) において列挙されたりボン表示と同じ二次元リボン結び目を表すリボン表示を省くと、次の5個が残る。

$$\begin{aligned} W_{108} &= x_3, x_4, x_5, x_2 \\ W_{109} &= x_3, x_4^{-1}, x_5^{-1}, x_2^{-1} \\ W_{110} &= x_3, x_4, x_5^{-1}, x_2^{-1} \\ W_{111} &= x_3^{-1}, x_4, x_5, x_2 \\ W_{112} &= x_5^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1}, x_4^{-1} \end{aligned}$$

一方、各  $G_j$  に対して [6] における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示  $\mathcal{R}_j$  の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式  $\Delta_j \pmod{\pm t^a}$  が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \Delta_{108} &= 1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 \\ \Delta_{109} &= -1 + 3t - 6t^2 + 4t^3 - t^4 \\ \Delta_{110} &= 1 - 4t + 5t^2 - 4t^3 + t^4 \\ \Delta_{111} &= -1 + 4t - 6t^2 + 3t^3 - 1 \\ \Delta_{112} &= -4 + 6t - 4t^2 + t^3 \end{aligned}$$

従って (ii) のタイプに該当するリボン表示が最小交差数を実現する二次元リボン結び目は高々5個である。但し、 $\mathcal{R}_{108}$  と  $\mathcal{R}_{112}$ ,  $\mathcal{R}_{109}$  と  $\mathcal{R}_{111}$ , はそれぞれ互いに鏡像の関係にある。

(証了)

### 補遺

[3] の3. 証明中の (iii) におけるリボン表示の語のうち、 $w_{76}$  から  $w_{91}$  までの語について最後の文字の添え字がすべて2になっているが、すべて1の誤りであるので訂正が必要である。

$$\begin{aligned} \text{また、} \Delta_{90} &= 1 - 3t + 4t^2 - t^3 \\ \text{は} \quad \Delta_{90} &= 1 - 3t + 4t^2 - 3t^3 \end{aligned}$$

の誤りであるので訂正が必要である。

#### 参考文献

- [1] Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), 999-1003.
- [2] 安田智之, 最小交差数4の二次元リボン結び目、奈良工業高等専門学校研究紀要第44号(2009年3月), 69 - 72.
- [3] 安田智之, 最小交差数4の二次元リボン結び目 II, 奈良工業高等専門学校研究紀要第45号(2010年3月), 59 - 61.
- [4] 安田智之, 最小交差数4の二次元リボン結び目 III, 奈良工業高等専門学校研究紀要第46号(2011年3月), 45 - 48.
- [5] Yasuda, T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 15 (2006), 1- 9.
- [6] Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in  $R^3$ , *Osaka J. Math.* 6 (1969), 435-446.
- [7] Yasuda, T., A presentation and genus for ribbon n-knots, *Kobe J. Math.* 6 (1989), 71-88.