

最小交差数4の二次元リボン結び目

安田 智之

Ribbon 2-knots with ribbon crossing number four

Tomoyuki YASUDA

二次元リボン結び目は四次元ユークリッド空間内において、 m 個の二次元球面からなる自明な二次元絡み目に対して、 $m-1$ 個の二次元円環領域を繋げることによって得られる。二次元リボン結び目 K^2 の構成法を示すこの表示のことを K^2 のリボン表示という。リボン表示において二次元円環領域が自明な二次元絡み目と交差する回数のことを、そのリボン表示のリボン交差数というが、 K^2 のすべてのリボン表示を考えたときのリボン交差数の最小数は K^2 の最小交差数とよばれる。これは二次元リボン結び目の複雑さをはかる重要な概念であり、[1]で初めて導入された。[1]においては最小交差数が3以下の二次元リボン結び目は17個しかないことが示され、それぞれに対して最小交差数を実現するリボン表示が与えられている。本論文では、最小交差数4のリボン結び目がいくつ存在するかについて考えたい。結果として、2個の二次元球面と1個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示をもつものは10個存在し、3個の二次元球面と2個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示をもつものうち、ひとつの二次元円環領域のリボン交差数が3で他方が1のものは、29個存在することが分かった。

1. 緒論

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間において m 個の二次元球面を $m-1$ 個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成される二次元球面である。自明でない二次元球面として二次元リボン結び目が発見されて以来、ひとつの二次元リボン結び目 K^2 を構成するのにどんな方法があるか、また本質的に何種類の方法があるのか、という問題に関心がもたれてきた。

この問題の解決に迫る一つの方法として二次元リボン結び目の最小交差数を決定するという方法がある。ここで最小交差数とは以下のように決められる二次元リボン結び目の不変量である。 K^2 を構成するための、自明な二次元絡み目と二次元円環領域との対のことを K^2 のリボン表示という。リボン表示 \mathcal{R} において、これを構成する円環領域が球面と交差する回数のことを \mathcal{R} のリボン交差数といい、 $cr(\mathcal{R})$ で表される。ここで K^2 のすべてのリボン表示を考えたとき、そのリボン交差数の最小数が K^2 の最小交差数である。これは $cr(K^2)$ で表される。

二次元リボン結び目に関する最小交差数の概念は[1]において初めて導入された。そうして[2]では最小交差数を評価する方法のひとつが導入され、トラス結び目のス

パン結び目として構成される二次元リボン結び目はすべて最小交差数が決定されることになった。また最小交差数を基準とした二次元リボン結び目の分類問題に関して言えば、[1]において、最小交差数が3以下の二次元リボン結び目がすべて決定され、総数は17個であることが示された。また、それらの最小交差数を実現するリボン表示も示されている。

本論文では次のことを示す。

定理 最小交差数4の二次元リボン結び目のうち

- (i) 2ベースリボン表示が最小交差数を実現するものは10個存在する。
- (ii) 一方のバンドのリボン交差数が3で他方のバンドのリボン交差数が1であるような3ベースリボン表示が最小交差数を実現するものは29個存在する。

2. 準備

2.1 定義 ([1])

$\{D_\mu^3 \mid \mu = 1, 2, \dots, m\}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^4 内の三次元球体の族とする。また、 $\partial D_\mu^3 = O_\mu^2$ とおく。

一方、 $f_{i_j r} : D^2 \times I \rightarrow \mathbf{R}^4$ ($r=1,2,\dots,m-1; i_r, j_r=1,2,\dots,m$) を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質 (1)、(2) を満たすものとする。但し D^2 は二次元球体、 $I=[0, 1]$ である。

- (1) $f_{i_j r} (D^2 \times I) \cap O_\mu^2 = \begin{cases} f_{i_j r} (D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f_{i_j r} (D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$
- (2) $(\bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)) \cup (\bigcup_{\mu=1}^m O_\mu^2)$ は連結。

ここで K^2 を二次元球面 $(\bigcup_{\mu=1}^m O_\mu^2) \cup (\bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)) - \dot{T}$ とする。但し $T = \bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)$ であり \dot{T} は T の内部を表す。この時、 K^2 のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

2.2 定義 ([1])

$\mathcal{O} = \bigcup_{\mu=1}^m D_\mu^3$, $\mathcal{B} = \bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i_j r} (D^2 \times I)$ とおくと $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ のことを二次元リボン結び目 K^2 に対する m ベースリボン表示 (或いは単にリボン表示) と呼ぶ。また \mathcal{O} をベース、 \mathcal{B} をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目 K^2 に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを K^2 のベース指数と呼び $b(K^2)$ で表す。このとき K^2 は $b(K^2)$ ベース二次元リボン結び目であるという。

2.3 定義 ([1])

$\ell_r = f_{i_j r} (\{0\} \times I)$ ($r=1,2,\dots,m-1$) とおく。但し、 $\{0\}$ は D^2 の中心点である。ここで各 ℓ_r が \mathcal{O} に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 r の方向に従って $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs_r}$ とし $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ のリボン交差と呼ぶ。但し各 ℓ_r の方向が O_i^2 から O_j^2 へ向かう方向とする。この時 $n = \sum_{r=1}^m s_r$ をリボン表示のリボン交差数と呼び、 $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ は n 交差リボン表示であるという。そうして K^2 に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことを K^2 の最小交差数 (或いは単に交差数) と呼び $cr(K^2)$ で表す。

2.4 定義

$a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs_r}$ に対応して、 s_r 個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は ℓ_r が D_μ^3 に点 a_{rv} ($v=1,2,\dots,s_r$) で正の側から交わるとき、 w_r の v 番目の文字を x_μ 、負の側から交わるときは同様 x_μ^{-1} とするものとする。このようにしてつくられた語 w_1, w_2, \dots, w_{m-1} を利用して K^2 の結び目群 $\pi_1(\mathbf{R}^4 - K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

(*1) $[x_\mu; \mu=1,2,\dots,m \mid x_i w_r x_i^{-1} w_r^{-1}; r=1,2,\dots,m-1]$ 但し各 x_μ は O_μ^2 のメリディアン生成元とする ([3])。以上の様な構成法でリボン表示 $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ から得られた群表

示 (*1) のことを $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各 w_r のことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示 (*1) からは、逆の手順でリボン表示 $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ を定められるので $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ のことをリボン群表示 (*1) に関連したリボン表示と呼ぶ。

3. 定理の証明

最小交差数 4 のリボン結び目のうち、まず 2 ベースリボン表示が最小交差数 4 を実現するものを列挙する。次に一方のバンドのリボン交差数が 3 で、他方のバンドのリボン交差数が 1 であるような 3 ベースリボン表示が最小交差数 4 を実現するものを列挙する。

3.1 2 ベースリボン表示

ここでは最小交差数 4 の二次元リボン結び目のうち 2 ベースリボン表示が最小交差数を実現するものを列挙する。

次のリボン群表示 G_i に関連したリボン表示を \mathcal{R}_i とする。

$$G_i = [x_1, x_2 \mid x_1 w_1 x_1^{-1} w_1^{-1}]$$

ここで w_i は文字 $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}$ のいずれかであつて 4 文字の語である。4 つの文字の優先順位をこの順であるとして、辞書式順序で 4 文字の語をすべて並べ、対応するリボン表示が最小交差数 3 以下の二次元リボン結び目のリボン表示であるものを省くと、次のようになる。

- $w_1 = x_2 \quad x_1 \quad x_1 \quad x_1$
- $w_2 = x_2 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1$
- $w_3 = x_2 \quad x_1^{-1} \quad x_1^{-1} \quad x_1^{-1}$
- $w_4 = x_2 \quad x_1^{-1} \quad x_2 \quad x_1^{-1}$
- $w_5 = x_2 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_1$
- $w_6 = x_2 \quad x_2 \quad x_1^{-1} \quad x_1^{-1}$
- $w_7 = x_2 \quad x_2 \quad x_2 \quad x_1$
- $w_8 = x_1^{-1} \quad x_1 \quad x_1 \quad x_1$
- $w_9 = x_1^{-1} \quad x_1 \quad x_1^{-1} \quad x_1$
- $w_{10} = x_1^{-1} \quad x_1^{-1} \quad x_1 \quad x_1$

一方、各 G_i に対して [4] における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示 \mathcal{R}_i の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式 $\Delta_i \pmod{\pm t^e}$ が次のように求まる。従って定理の (i) に該当するものは 10 個である。

- $\Delta_1 = -1 + t \quad -t^4$
- $\Delta_2 = -1 + t \quad -t^2 + t^3 - t^4$
- $\Delta_3 = -1 \quad -t^2 + t^3$
- $\Delta_4 = -3 + 2t$

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= -1 && +t^2 && -t^4 \\ \Delta_6 &= -2 && +t^2 && \\ \Delta_7 &= -1 && +t^3 - t^4 && \\ \Delta_8 &= 1 && -t && -t^3 \\ \Delta_9 &= 2 - 3t && && \\ \Delta_{10} &= 1 && -2t^2 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{31} &= x_3^{-1} && x_1^{-1} && x_1^{-1} && , && x_2^{-1} \\ W_{32} &= x_3^{-1} && x_1^{-1} && x_3^{-1} && , && x_2 \\ W_{33} &= x_3^{-1} && x_1^{-1} && x_3^{-1} && , && x_2^{-1} \\ W_{34} &= x_3^{-1} && x_2 && x_1 && , && x_2 \\ W_{35} &= x_3^{-1} && x_2 && x_1^{-1} && , && x_2 \\ W_{36} &= x_3^{-1} && x_2^{-1} && x_1 && , && x_2^{-1} \\ W_{37} &= x_3^{-1} && x_2^{-1} && x_1^{-1} && , && x_2^{-1} \\ W_{38} &= x_3^{-1} && x_3^{-1} && x_1^{-1} && , && x_2 \\ W_{39} &= x_3^{-1} && x_3^{-1} && x_1^{-1} && , && x_2^{-1} \end{aligned}$$

但し、 \mathcal{R}_1 と \mathcal{R}_7 , \mathcal{R}_3 と \mathcal{R}_8 , \mathcal{R}_4 と \mathcal{R}_9 , \mathcal{R}_6 と \mathcal{R}_{10} はそれぞれ互いに鏡像の関係にある。

3.2 3ベースリボン表示 (前半)

ここでは、一方のバンドのリボン交差数が3で、他方のバンドのリボン交差数が1であるような3ベースリボン表示が最小交差数4を実現するものを列挙する。次のリボン群表示 G_j に関連したリボン表示を \mathcal{R}_j とする。

$$G_j = [x_1, x_2, x_3 \mid x_1 w_{j1} x_2^{-1} w_{j1}^{-1}, x_1 w_{j2} x_3^{-1} w_{j2}^{-1}]$$

ここで w_{j1} は文字 $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}$ のいずれかでつくられる3文字の語である。一方、 w_{j2} は x_2, x_2^{-1} のいずれかで作られる1文字の語である。計4つの文字の優先順位は文字 $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}$ の順であるとして、辞書式順序で w_{j1} が3文字と w_{j2} が1文字の計4文字の語 w_j をすべて並べ、対応するリボン表示が最小交差数3以下の二次元リボン結び目を実現するものと、前節3.3で列挙された最小交差数4の二次元リボン結び目を実現するものを省くと次のようになる。

$$\begin{aligned} W_{11} &= x_2 && x_3 && x_1 && , && x_2^{-1} \\ W_{12} &= x_2 && x_3 && x_1^{-1} && , && x_2^{-1} \\ W_{13} &= x_2 && x_3^{-1} && x_1 && , && x_2^{-1} \\ W_{14} &= x_2 && x_3^{-1} && x_1^{-1} && , && x_2^{-1} \\ W_{15} &= x_2^{-1} && x_3 && x_1 && , && x_2 \\ W_{16} &= x_2^{-1} && x_3 && x_1^{-1} && , && x_2 \\ W_{17} &= x_2^{-1} && x_3^{-1} && x_1 && , && x_2 \\ W_{18} &= x_2^{-1} && x_3^{-1} && x_1^{-1} && , && x_2 \\ W_{19} &= x_3 && x_1 && x_1 && , && x_2 \\ W_{20} &= x_3 && x_1 && x_3 && , && x_2 \\ W_{21} &= x_3 && x_1 && x_3 && , && x_2^{-1} \\ W_{22} &= x_3 && x_1^{-1} && x_3 && , && x_2 \\ W_{23} &= x_3 && x_1^{-1} && x_3 && , && x_2^{-1} \\ W_{24} &= x_3 && x_2 && x_1 && , && x_2 \\ W_{25} &= x_3 && x_2 && x_1^{-1} && , && x_2 \\ W_{26} &= x_3 && x_2^{-1} && x_1 && , && x_2^{-1} \\ W_{27} &= x_3 && x_2^{-1} && x_1^{-1} && , && x_2^{-1} \\ W_{28} &= x_3 && x_3 && x_1 && , && x_2 \\ W_{29} &= x_3 && x_3 && x_1 && , && x_2^{-1} \\ W_{30} &= x_3^{-1} && x_1 && x_3^{-1} && , && x_2^{-1} \end{aligned}$$

一方、各 G_j に対して [4] における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示 \mathcal{R}_j の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式 $\Delta_j \pmod{\pm t^a}$ が次のように求まる。従って定理の (ii) に該当するものは高々29個である。

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -1 && +2t^2 && -2t^3 \\ \Delta_{12} &= -1 && -t && +2t^2 && -t^3 \\ \Delta_{13} &= -2 && +t && \\ \Delta_{14} &= -1 && -t^2 && +t^3 \\ \Delta_{15} &= 1 && -t && -t^3 \\ \Delta_{16} &= 1 && -2t && \\ \Delta_{17} &= -1 && +2t && -t^2 && -t^3 \\ \Delta_{18} &= -2 && +2t && -t^3 \\ \Delta_{19} &= 1 && -2t && +t^2 && -t^4 \\ \Delta_{20} &= 1 && -2t && +2t^2 && -2t^3 \\ \Delta_{21} &= -1 && +2t && -2t^2 && +t^3 && -t^4 \\ \Delta_{22} &= 2 && -4t && +t^2 && \\ \Delta_{23} &= -2 && +3t && -2t^2 && \\ \Delta_{24} &= 1 && -2t && && +t^3 && -t^4 \\ \Delta_{25} &= 1 && -2t && -t^2 && +t^3 \\ \Delta_{26} &= -1 && && && && \\ \Delta_{27} &= -1 && && +t^2 && -t^3 \\ \Delta_{28} &= 1 && -t && -t^2 && +t^3 && -t^4 \\ \Delta_{29} &= -1 && +t && +t^2 && -2t^3 \\ \Delta_{30} &= 1 && -4t && +2t^2 && \\ \Delta_{31} &= -1 && && +t^2 && -2t^3 && +t^4 \\ \Delta_{32} &= -1 && +t && -2t^2 && +2t^3 && -t^4 \\ \Delta_{33} &= -2 && +2t && -2t^2 && +t^3 \\ \Delta_{34} &= -1 && +t && && -t^3 \\ \Delta_{35} &= -1 && && && && \\ \Delta_{36} &= 1 && -t && -2t^2 && +t^3 \\ \Delta_{37} &= -1 && +t && && -2t^3 && +t^4 \\ \Delta_{38} &= -2 && +t && +t^2 && -t^3 \\ \Delta_{39} &= -1 && +t && -t^2 && -t^3 && +t^4 \end{aligned}$$

但し、 \mathcal{R}_{11} と \mathcal{R}_{18} , \mathcal{R}_{12} と \mathcal{R}_{17} , \mathcal{R}_{13} と \mathcal{R}_{16} , \mathcal{R}_{14} と \mathcal{R}_{15} ,
 \mathcal{R}_{19} と \mathcal{R}_{31} , \mathcal{R}_{20} と \mathcal{R}_{33} , \mathcal{R}_{21} と \mathcal{R}_{32} , \mathcal{R}_{22} と \mathcal{R}_{30} , \mathcal{R}_{24} と \mathcal{R}_{37} ,
 \mathcal{R}_{25} と \mathcal{R}_{36} , \mathcal{R}_{26} と \mathcal{R}_{35} , \mathcal{R}_{27} と \mathcal{R}_{34} , \mathcal{R}_{28} と \mathcal{R}_{39} , \mathcal{R}_{29} と \mathcal{R}_{38} ,
はそれぞれ互いに鏡像の関係にある。

(証了)

参考文献

- [1]Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001) , 999-1003.
- [2]Yasuda,T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 15 (2006) , 1- 9.
- [3]Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in \mathbb{R}^4 , *Osaka J. Math.* 6 (1969) , 435-446.
- [4]Yasuda,T., A presentation and genus for ribbon n-knots, *Kobe J. Math.* 6 (1989) , 71-88.