下方準ド・モルガン代数のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for lower quasi-De Morgan algebras

Kenichi ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束 (bounded distributive lattice (BDL)：$F1$～ $F7^\circ$ を満たす) で 2 重否定律の下方性（$F8$，$F8^\circ$ つまり $x \leq \neg\neg x$) と半ド・モルガン律 ($F9$，$F9^\circ$) と 0，1 についての性質 ($F10$，$F10^\circ$) を満たす代数系が [8] で定義されている下方準ド・モルガン代数 (lower quasi-De Morgan algebra (LQMA)：[2] の MP-代数と同じ)である．本論文では，下方準ド・モルガン代数で成り立つ性質を調べる．そして下方準ド・モルガン代数と演繹的に同値な，G．Gentzen の方法（[7]）でのシーケント(式)による形式的体系 GLQMA を考える．

§1　ワード

[3]，[4]，[5]，[6] と同様にワードを定義する．

［定義１］（ワードの定義）

(1) 定数 0，1 はワードである．

(2) 変数 p_1，$p_2, \ldots,$ $p_n, \ldots$はワードである．

(3) x と y がワードのとき $x \wedge y$，$x \vee y$，$\neg x$ はワードである．

(4) 以上の (1)，(2)，(3) によって構成された記号列のみがワードである．

ワード全体の集合を A とし，２項演算$\vee$,$\wedge$ と１項演算 $\neg$をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A\ ;\ 0,\ 1,\ \vee,\ \wedge,\ \neg)$ を考える．

§2　下方準ド・モルガン代数（LQMA）

［定義２］（LQMA の定義）

A の任意の元 x，y，z に対して，次の $F1 \sim F10^\circ$ が成り立つとき，代数系 $\mathbf{A}$ を下方準ド・モルガン代数(LQMA)とよぶ([8])．

$F1$　$x \wedge 0 = 0$	$F1^\circ$　$x \vee 0 = x$
$F2$　$x \wedge 1 = x$	$F2^\circ$　$x \vee 1 = 1$
$F3$　$x \wedge x = x$	$F3^\circ$　$x \vee x = x$
$F4$　$x \wedge y = y \wedge x$	$F4^\circ$　$x \vee y = y \vee x$
$F5$　$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5^\circ$　$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$　$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6^\circ$　$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$　$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7^\circ$　$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$　$x \wedge \neg\neg x = x$	$F8^\circ$　$x \vee \neg\neg x = \neg\neg x$
$F9$　$\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$	$F9^\circ$　$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
$F10$　$\neg 0 = 1$	$F10^\circ$　$\neg 1 = 0$

［定義３］（不等式の定義）
x，y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき，$x \leq y$ と書く．

[1]，[3]，[4]，[5]，[6] と同様に次の定理が成り立つ．
［定理１］ 代数系 **A** が下方準ド・モルガン代数(LQMA)であり(つまり $F1\sim F10^\circ$が成り立つ)，かつ定義３により $x \leq y$ が定義される$\Longleftrightarrow$ Aの任意の元 x，y，z に対して **A** で次の $T1 \sim T12^\circ$が成り立つ．

$T1$　$x \leq x$	
$T2$　$x \leq y,\ y \leq x \Longleftrightarrow x = y$	
$T3$　$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$	
$T4$　$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$	
$T5$　$0 \leq x$	$T5^\circ$　$x \leq 1$
$T6$　$x \wedge y \leq x,\quad x \wedge y \leq y$	$T6^\circ$　$x \leq x \vee y,\quad y \leq x \vee y$
$T7$　$z \leq x,\quad z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$	$T7^\circ$　$x \leq z,\ y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$
$T8$　$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$T8^\circ$　$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$
$T9$　$x \leq y \Longrightarrow \neg\neg x \leq \neg\neg y$	$T9^\circ$　$\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x$
$T10$ $x \leq \neg\neg x$	
$T11$ $\neg\neg x \wedge \neg\neg y \leq \neg\neg(x \wedge y)$	$T11^\circ$ $\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \vee y)$
$T12$ $\neg 1 \leq x$	$T12^\circ$ $x \leq \neg 0$

(証明)
$\Longrightarrow$:
$T1\sim T8^\circ$ と $T10$ と $T12$ は[3]の定理１の証明と同じであり，$T11$ と $T12^\circ$ は[5]の定理１の証明と同じである．
$T9$: $x \leq y$ とすると定義３より $x \wedge y = x$．これと $F9$ から $\neg\neg x \wedge \neg\neg y = \neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x$で$\neg\neg x \leq \neg\neg y$が成り立つ．
$T9^\circ$：$\Longrightarrow$: $T10$ より$\neg x \leq \neg\neg\neg x$．また $\neg x \wedge \neg\neg\neg x \overset{F9^\circ}{=} \neg(x \vee \neg\neg x) \overset{F8^\circ}{=} \neg(\neg\neg x) = \neg\neg\neg x$より $\neg\neg\neg x \leq \neg x$で$\neg\neg\neg x = \neg x$が成り立つ．そこで $\neg\neg x \leq \neg\neg y$とすると $T4$ より$\neg\neg x \vee \neg\neg y = \neg\neg y$．この両辺に否定をとると $F9^\circ$ から$\neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg\neg\neg y$．上のことから $\neg x \wedge \neg y = \neg y$で$\neg y \leq \neg x$が成り立つ．$\Longleftarrow$ ：$\neg y \leq \neg x$とすると$\neg x \vee \neg y = \neg x$で$\neg\neg x \wedge \neg\neg y \overset{F9^\circ}{=} \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg(\neg x) = \neg\neg x$より$\neg\neg x \leq \neg\neg y$が成り立つ．
$\Longleftarrow$:
定義３により $x \leq y$ が定義されることと $F1\sim F8^\circ$ と $F10^\circ$ は[3]の定理１の証明と同じであり，$F10$ は[5]の定理１の証明と同じである．
$F9$：$T6$ で $T9$ を使うと$\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x$，$\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg y$．これらに $T7$ を使うと$\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg y$．これと $T11$ に $T2$ を使って$\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$が成り立つ．
$F9^\circ$：$T6^\circ$で $T9$ を使うと$\neg\neg x \leq \neg\neg(x \vee y)$,$\neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$．$T9^\circ$により$\neg(x \vee y) \leq \neg x$,$\neg(x \vee y) \leq \neg y$．これらに $T7$ を使うと$\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y$．これと $T11^\circ$ に $T2$ を使って$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$が成り立つ．　　(証明終)

次のことが明らかに成り立つ．
［注意１］ 束($T1 \sim T4$ と $T6 \sim T7^\circ$ が成り立つ)において，次の(1)，(2)，(3)が成り立つ．
(1)　($T9$ かつ $T9^\circ$) $\Longrightarrow$ $T9^*$($x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x$)
(2)　$T9^* \Longrightarrow T9$
(3)　($T9^*$ かつ$\neg\neg\neg x = \neg x$) $\Longrightarrow$ $T9^\circ$

[5]の注意 1 と同様に次のことが成り立つ．

［注意 2 ］ 束において，次の ⑴, ⑵, ⑶ が成り立つ．

⑴ $[T9^*(x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$ かつ $T10(x \leq \neg\neg x)] \Longleftrightarrow (x \leq \neg y \Longrightarrow y \leq \neg x)$

⑵ $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y \Longleftrightarrow T9^*$

⑶ $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg y \Longleftrightarrow T9(x \leq y \Longrightarrow \neg\neg x \leq \neg\neg y)$

（証明）

⑴：$\Longrightarrow$： $x \leq \neg y$ とすると仮定から $\neg\neg y \leq \neg x$ であり，$y \leq \neg\neg y$ より $T3$ から $y \leq \neg x$ が成り立つ．$\Longleftarrow$：$T1$ より $\neg x \leq \neg x$ で仮定から $x \leq \neg\neg x$ が成り立つ．次に $x \leq y$ とする．$x \leq y \leq \neg\neg y$ より仮定から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ．

⑵, ⑶ は[5]の注意 1 の ⑵, ⑶ の証明とそれぞれ同じである． （証明終）

さらに，[5] の注意 2 と同様に次のことが成り立つ．

［注意 3 ］ 束において，次の ⑴～⑺ が成り立つ．

⑴ $[F9^\circ(\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y)$ かつ $T10(x \leq \neg\neg x)] \Longrightarrow [T9^\circ(\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x)]$

⑵ $(F9^\circ$ かつ $T10) \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

⑶ $[(x \leq \neg y \Longrightarrow y \leq \neg x)$ かつ $(\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)] \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

⑷ $[(\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$ かつ$\neg\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)] \Longrightarrow T9^*(x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$

⑸ $T9^* \Longrightarrow \neg\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$

⑹ $[(\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$ かつ $\neg x \leq \neg\neg\neg x] \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

⑺ $$\left\{\begin{array}{l} (F9)\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y \\ (F9^\circ)\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ \neg\neg\neg x = \neg x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ① \ \neg(x \wedge y) = \neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg(\neg x \vee \neg y) \\ ② \ \neg\neg\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ ③ \ \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg\neg(x \wedge y) \end{array}\right.$$

（証明）

⑴：定理 1 の $T9^\circ$ の証明と同じである．

⑵：定理 1 の $T9^\circ$ の証明の前半部分と同じである．

⑶：$\neg\neg x \leq \neg\neg x$ で仮定の前半を使うと $\neg x \leq \neg\neg\neg x$．この式の x を $\neg x$ にすると $\neg\neg x \leq \neg\neg\neg\neg x$．これに仮定の後半を使うと $\neg\neg\neg x \leq \neg x$．よって $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ．

⑷：$x \leq y$ とすると $x \vee y = y$．これと仮定により $\neg\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y) = \neg\neg y \leq \neg\neg x \vee \neg\neg y$ から $\neg\neg x \vee \neg\neg y = \neg\neg y$ で $\neg\neg x \leq \neg\neg y$．仮定から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ．

⑸：$x \leq x \vee y$，$y \leq x \vee y$ に $T9^*$ を 2 回使うと $\neg\neg x \leq \neg\neg(x \vee y)$，$\neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$ で $T7^\circ$ により $\neg\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$ が成り立つ．

⑹, ⑺ は[5]の注意 2 の ⑵, ⑶ の証明とそれぞれ同じである． （証明終）

[8]と同様に次のことが成り立つ．

［注意 4 ］ **A** が BDL のとき，次の ⑴～⑷ が成り立つ．

⑴ **A** が 下方準ド・モルガン代数(LQMA)である $\Longrightarrow$ **A** は半ド・モルガン代数(SDMA)である．

⑵ **A** が ド・モルガン代数(DM)である $\Longrightarrow$ **A** は下方準ド・モルガン代数(LQMA)である．

⑶ **A** が 擬補分配束(PDL)である $\Longrightarrow$ **A** は下方準ド・モルガン代数(LQMA)である．

⑷ **A** が 擬補分配束(PDL)である $\Longleftrightarrow$ **A** は下方準ド・モルガン代数(LQMA)であり，かつ $\neg x \wedge \neg\neg x = 0$ を満たす．

（証明）

⑴：SDMA の定義([5])から $\neg\neg\neg x = \neg x$ を示せばよい．これは注意 3 の ⑵ から LQMA で成り立つ．

⑵：DM の定義([1])から明らかである．

⑶：[6]の注意 3 の ⑶ と ⑻ より $x \leq \neg\neg x$ と$\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$ が成り立つことからいえる．

⑷：$\Longrightarrow$：上の ⑶ と[6]の注意 3 の ⑵ より $\neg x \wedge \neg\neg x = 0$ が成り立つことからいえる．$\Longleftarrow$：[6]の注意 4 の ⑷ から $x \wedge \neg x = 0$ を示せばよい．[6]の注意 3 の ⑸ の $\Longleftarrow$ が LQMA で成り立つ．つまり$\neg\neg x \wedge y = 0$ とする．

[6]の注意２の (2) と同じく束において $\wedge$ の単調性（$x \leq y,\ u \leq v \Longrightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$）が成り立つ．$x \leq \neg\neg x$ と $y \leq y$ に，この $\wedge$ の単調性を使うと $x \wedge y \leq \neg\neg x \wedge y = 0$ から $x \wedge y = 0$．よって $\neg\neg x \wedge y = 0 \Longrightarrow x \wedge y = 0$ が成り立つ．ここで y を $\neg x$ にすれば $\neg\neg x \wedge \neg x = 0 \Longrightarrow x \wedge \neg x = 0$ で $x \wedge \neg x = 0$ が成り立つ．

（証明終）

§３　LQMA のシーケントによる形式的体系 GLQMA

[3]，[4]，[5]，[6]と同様にシーケントの定義をする．

［定義４］（シーケント（式）の定義）

ワードの有限列をギリシア大文字 Γ，Δ などで表す．ワードの有限列 $a_1,\ldots,a_m$ を Γ とし，$b_1,\ldots,b_n$ を Δ とするとき，LQMA での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント（式）$\Gamma \longrightarrow \Delta$ で表す．ただし，Γ が空のとき（$\Gamma = \emptyset$ と書く），$1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし，$\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ とする．$\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない．

このとき，下方準ド・モルガン代数（LQMA）のシーケントによる形式的体系 GLQMA を[3]，[4]，[5]，[6]と同様に次のように定義する．

［定義５］（GLQMA の定義）

[1] 始式

$$(B1)\ a \longrightarrow a \qquad (B2)\ 0 \longrightarrow \Delta \qquad (B3)\ \Gamma \longrightarrow 1 \qquad (B4)\ a \longrightarrow \neg\neg a$$

[2] 推論規則

(1) 構造に関する推論規則：

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}\ (\longrightarrow w)$$

$$\frac{a,\ a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a,\ a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}\ (\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1,\ a,\ b,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1,\ b,\ a,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ (e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\ a,\ b,\ \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\ b,\ a,\ \Delta_2}\ (\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1,\ a \qquad a,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1,\ \Delta_2}\ (cut)$$

(2) 論理記号に関する推論規則：

$$\frac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta \qquad b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta,\ b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \wedge b}\ (\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\neg\neg\Gamma \longrightarrow \neg\neg\Delta}\ (\neg\neg \longrightarrow \neg\neg) \qquad \frac{\neg\neg\Gamma \longrightarrow \neg\neg\Delta}{\neg\Delta \longrightarrow \neg\Gamma}\ (\neg \longrightarrow \neg)$$

ただし，Γ が $a_1,\ldots,a_m$ のとき $\neg\neg\Gamma$ は $\neg\neg a_1,\ldots,\neg\neg a_m$ を表し，$\neg\Gamma$ は $\neg a_m,\ldots,\neg a_1$ を表す．$\Gamma = \emptyset$ のときは $\neg\neg\Gamma = \neg\Gamma = \emptyset$ とする．

［注意 5 ］ 次の同値性が成り立つ.

$$(B4) \Longleftrightarrow \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ \neg\neg\, a}\ (\longrightarrow \neg\neg)$$

（証明）

$(B4) \Longrightarrow (\longrightarrow \neg\neg)$: $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \quad a \longrightarrow \neg\neg\, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ \neg\neg\, a}\ (cut)$

$(\longrightarrow \neg\neg) \Longrightarrow (B4)$: $\dfrac{a \longrightarrow a}{a \longrightarrow \neg\neg\, a}\ (\longrightarrow \neg\neg)$

（証明終）

§ 4　LQMA と GLQMA の演繹的同値性

［3］，［4］，［5］，［6］ と同様に次の定義をする.

［定義 6 ］（$\vdash$ の定義）

シーケント $\Gamma \longrightarrow \Delta$ が GLQMA で証明可能であるとき，$\vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$ と書く.

［定義 7 ］（$\models$ の定義）

不等式 $a \leq b$ が LQMA で成り立つとき $\models a \leq b$ と書く.

［定義 8 ］（LQMA での等号の定義）

a，b をワードとする． $\vdash a \longrightarrow b$ かつ $\vdash b \longrightarrow a$ のとき $a \equiv b$ とすれば，$\equiv$ は 同値関係である．そこで $A/_{\equiv}$（A の $\equiv$ による商集合）をあらためて A とし，$\equiv$ を $=$ とみなしたものを LQMA での等号とする.

（つまり，リンデンバウム代数（Lindenbaum algebra）を考える.）

このとき，［3］，［4］，［5］，［6］ と同様に次の 2 つの定理が成り立つ.

［定理 2 ］ a，b をワードとするとき，次のことが成り立つ.

$$\models a \leq b \quad \text{ならば} \quad \vdash a \longrightarrow b$$

（証明）

LQMA のすべての公理（$F1 \sim F10^{\circ}$） が GLQMA で証明可能であることを示せばよいが，これらと同値な $T1 \sim T12^{\circ}$ が GLQMA で証明可能であることを示す.

$T1 \sim T8^{\circ}$ は［3］の定理 2 の証明と同じである.

$T9$: $\dfrac{x \longrightarrow y}{\neg\neg\, x \longrightarrow \neg\neg\, y}\ (\neg\neg \longrightarrow \neg\neg)$

$T9^{\circ}$: $\Longrightarrow$: $\dfrac{\neg\neg\, x \longrightarrow \neg\neg\, y}{\neg\, y \longrightarrow \neg\, x}\ (\neg \longrightarrow \neg)$

$\Longleftarrow$: $\dfrac{\dfrac{\neg\, y \longrightarrow \neg\, x}{\neg\neg\neg\, y \longrightarrow \neg\neg\neg\, x}\ (\neg\neg \longrightarrow \neg\neg)}{\neg\neg\, x \longrightarrow \neg\neg\, y}\ (\neg \longrightarrow \neg)$

$T10$: 始式（B4）から成り立つ.

$T11$:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} x \longrightarrow x \\ \hline\hline x,\ y \longrightarrow x \end{array} \qquad \dfrac{y \longrightarrow y}{x,\ y \longrightarrow y}}{x,\ y \longrightarrow x \wedge y}}{\neg\neg\, x, \neg\neg\, y \longrightarrow \neg\neg(x \wedge y)} \\ \hline\hline \neg\neg\, x \wedge \neg\neg\, y \longrightarrow \neg\neg(x \wedge y) \end{array}$$

$T11^{\circ}$:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} x \longrightarrow x \\ \hline\hline x \longrightarrow y,\ x \end{array} \qquad \dfrac{y \longrightarrow y}{y \longrightarrow y,\ x}}{x \vee y \longrightarrow y,\ x}}{\neg\neg(x \vee y) \longrightarrow \neg\neg\, y,\ \neg\neg\, x}}{\neg\, x,\ \neg\, y \longrightarrow \neg(x \vee y)} \\ \hline\hline \neg\, x \wedge \neg\, y \longrightarrow \neg(x \vee y) \end{array}$$

$T12$： $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\longrightarrow 1}{\longrightarrow\ \neg\neg 1}\ (\neg\neg\longrightarrow\neg\neg)}{\neg 1 \longrightarrow}\ (\neg\longrightarrow\neg)}{\neg 1 \longrightarrow\ x}$

$T12^\circ$： $\dfrac{\dfrac{\dfrac{0 \longrightarrow}{\neg\neg 0 \longrightarrow}\ (\neg\neg\longrightarrow\neg\neg)}{\longrightarrow \neg 0}\ (\neg\longrightarrow\neg)}{x \longrightarrow \neg 0}$ （証明終）

［定理３］ $a_1, \ldots, a_m$，$b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき，次のことが成り立つ．

$$\vdash a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \quad \text{ならば} \quad \models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

（証明）

Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表す．Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す．GLQMA の始式（$B1$），（$B2$），（$B3$），（$B4$）はそれぞれ $T1, T5, T5^\circ, T10$ により LQMA で成り立つ．次に GLQMA の各推論規則の上式(上のシーケント)に対応する不等式が LQMA で成り立つと仮定するとき，下式に対応する不等式が LQMA で成り立つことを示せばよい．

（$w \longrightarrow$）〜（$\longrightarrow \wedge$）は[3]の定理３の証明と同じである．

（$\neg\neg \longrightarrow \neg\neg$）：$\models x \leq y$ とすると $T9$ から $\models \neg\neg x \leq \neg\neg y$ が成り立つ．

（$\neg \longrightarrow \neg$）：$\models \neg\neg x \leq \neg\neg y$ とすると $T9^\circ$ から $\models \neg y \leq x$ が成り立つ． （証明終）

以上により LQMA と GLQMA が演繹的に同値であることがわかる．

［注意６］ LQMA での $T10(x \leq \neg\neg x)$ を $T10^\circ$（$\neg\neg x \leq x$）に変えた代数系を上方準ド・モルガン代数(upper quasi-De Morgan algebra (UQMA))とよぶ．このとき，次のように LQMA で成り立つことは UQMA で双対的に成り立つ．

① 定義２で $F8$ を $x \wedge \neg\neg x = \neg\neg x$ に，$F8^\circ$ を $x \vee \neg\neg x = x$ にする．

② 注意２では

(1)（$T9^*$ かつ $T10^\circ$）$\Longleftrightarrow$（$\neg x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq x$）

③ 注意３では

(1)（$F9^\circ$ かつ $T10^\circ$）$\Longrightarrow T9^\circ$

(2)（$F9^\circ$ かつ $T10^\circ$）$\Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

(3) $[(\neg x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq x)$ かつ $(\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)] \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

(6) $[(\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$ かつ $\neg\neg\neg x \leq \neg x] \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

④ 注意４では

(1) **A** が UQMA である $\Longrightarrow$ **A** は SDMA である．

(2) **A** が DM である $\Longrightarrow$ **A** は UQMA である．

(3)，(4) は不成立．

⑤ 定義５で（$B4$）を（$B5$）$\neg\neg a \longrightarrow a$ にする．

⑥ 注意５では （$B5$） $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{\neg\neg a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\neg\neg\longrightarrow)$

参考文献

[1] 荒金 憲一，MS-algebra に双対な代数系について，奈良高専研究紀要 28(1993)，105-111.
[2] 荒金 憲一，ファジイ代数に関連する代数系について，奈良高専研究紀要 31(1996)，81-89.
[3] 荒金 憲一，MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 33(1998)，119-127.
[4] 荒金 憲一，準ストーン代数のシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 40(2005)，87-94.
[5] 荒金 憲一，半ド・モルガン代数のシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 41(2006)，109-114.
[6] 荒金 憲一，擬補分配束のシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 42(2007)，73-79.
[7] G. Gentzen，*Untersuchungen über das logische Schliessen*，Mathematische Zeitschrift 39(1935)，176-216，405-431.
[8] H.P. Sankappanavar，*Semi-De Morgan algebaras*，The Journal of Symbolic Logic 52(1987)，712-724.