

非線形過渡現象解析のためのコンダクタンス行列縮約法

山本 和男*¹ 西田 佳史*¹ 雨谷 昭弘*²

An Abbreviated Conductance Matrix for Nonlinear Transient Analyses

Kazuo YAMAMOTO, Yoshifumi NISHIDA and Akihiro AMETANI

非線形過渡現象解析には、SPICEのニュートン・ラブソン法、EMTDCの線形補完法等があるが、前者は回路形態によっては収束しない場合があり、安定性に欠ける。また後者は、簡単な特性を有する非線形要素には比較的容易に応用可能であるが、区分線形近似表現できないような要素を有する場合、解析できない欠点がある。その他、非線形振動回路を後者の手法で解析した場合、大きな誤差を生じることも報告されている。

本論文では、上記の各種収束計算法を過渡解析に応用した場合、計算時間が大きくなる欠点を解決するためにコンダクタンス行列の縮約法を提案している。これは、これまで敬遠されがちであった非線形過渡解析への収束計算法の応用において、計算時間を短縮する非常に有効な手段である。また、この収束計算法は節点方程式を基本方程式としているため、容易に他の回路シミュレーターに応用でき、汎用性を有する点もこの手法の長所である。提案手法をこれら本論文の例題回路に比べ比較的大きな実回路に応用することで、計算時間は飛躍的に減少することが期待できる。

1. 緒 言

近年、電気・電子機器に多くの非線形要素が用いられるようになり、線形回路のみならず複雑な非線形回路を精度よく解析する必要がある。しかしながら、既存の過渡解析シミュレーターを用い非線形回路を解析した場合、大きな誤差を生じる場合が多く、新たなアルゴリズムの開発が急務である。

非線形回路解析には、SPICEのニュートン・ラブソン法^[1]、EMTDC^[2]の線形補完法等があるが、前者は回路形態によっては収束しない場合があり安定性に欠ける。また後者は、簡単な特性を有する非線形要素には比較的容易に応用可能であるが、区分線形近似表現できないような要素を有する場合、解析できない欠点がある。その他、非線形振動回路を後者の手法で解析した場合、大きな誤差を生じることも報告されている^[3]。

一方、非線形回路解析の一手法であり、他の手法に比べても比較的安定で高精度な複合収束計算法^[4]は修正予測子-修正子法とニュートン・ラブソン法より構成され、注目されている非線形過渡解析アルゴリズムの一つである。

そこで本研究では、台形積分則を基本とするDommel

法^[5]と、複合収束計算法を用いた非線形過渡解析を行う場合に、クラウトのLU分解法^[6]を用い、線形、非線形ノードを含む回路を非線形ノードのみの回路に縮約し、計算時間を大幅に短縮する手法を提案する。また、回路縮約時のコンダクタンス行列に着目し、効率よく縮約した等価回路を作成する方法についても報告する。

2. 回路の定式化

2.1 Dommel法

線形素子(抵抗、インダクタンス、コンダクタンス等)や非線形素子をDommel法に基づき電流源 I とコンダクタンス G で表現する^[4]。

ここでは詳細^[5]については省略するが、図1に示すように R 、 L 、 C 要素はすべて電流源 I とコンダクタンス G 並列接続で表現でき、以下のような関係式が成り立つ。

抵抗の場合：

$$i(t) = G_R e(t) \quad (1)$$

$$I(t-dt) = 0 \quad (2)$$

$$G_R = \frac{1}{R} \quad (3)$$

インダクタンスの場合：

$$i(t) = G_L e(t) + I(t-dt) \quad (4)$$

*1 奈良工業高等専門学校

*2 同志社大学

$$I(t-dt) = i(t-dt) + G_L e(t-dt) \tag{5}$$

$$G_L = \frac{dt}{2L} \tag{6}$$

キャパシタンスの場合：

$$i(t) = G_C e(t) + I(t-dt) \tag{7}$$

$$I(t-dt) = -i(t-dt) - G_C e(t-dt) \tag{8}$$

$$G_C = \frac{2C}{dt} \tag{9}$$

但し、 e は各素子の両端子間電圧、 I は電流源値、 i は R 、 L 、 C 素子に流れる電流である。また t は時間を、 dt は時間刻み幅を表す。解析において dt はユーザーが任意に決定する。(6)式、(9)式からもわかるように、 G_L 、 G_C は dt の関数となり、時間刻み幅に依存する。コンダクタンス G は、抵抗 R の逆数、 $1/R$ である。

以上の様に、インダクタンスやキャパシタンス等を含めすべての素子を抵抗素子と電流源で取り扱うことができ、回路方程式を構築する際、アドミタンス行列をコンダクタンス行列として取り扱うことが可能となり、複素計算が必要なく、簡略に定式化できる利点がある。

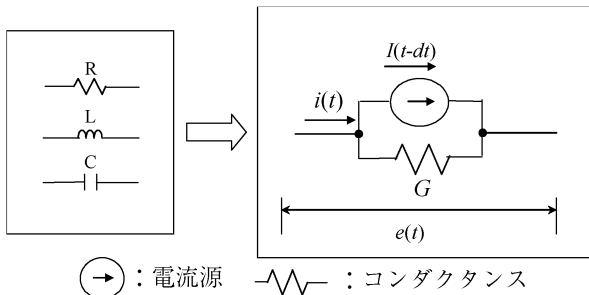


図1 Dommel法

2.2 節点解析法

回路中の素子と素子との節目を節点(node)という。「節点に流れ込む電流の和はゼロである」というキルヒホッフの第1法則に従い回路方程式を作成し、解を求める基本的な手法を節点解析法という。以下、図2の例題回路にて説明を行う。

例題回路に前節で述べたDommel法を適用すると図2の例題回路は図3のような等価回路に変換される。そして各ノードに、節点番号を割り当てる。このとき、後に説明する複合収束計算法のために線形ノードを1~ M 、非線形ノードを $M+1$ ~ N とする。この例題回路では、線形ノードが①、非線形ノードが②、③となる。

次に、節点解析法を用いてコンダクタンス行列 \mathbf{G} を作成し、キルヒホッフの第1法則に基づき、各ノードの電流源ベクトル \mathbf{J} を作成すると、それぞれ(10)式、(11)式となる。

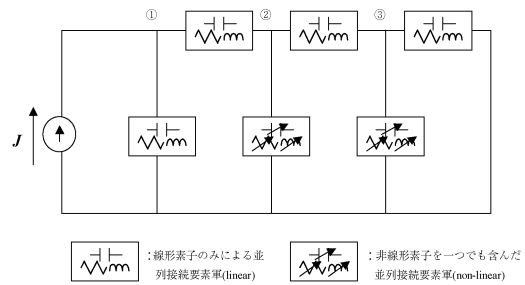


図2 例題回路

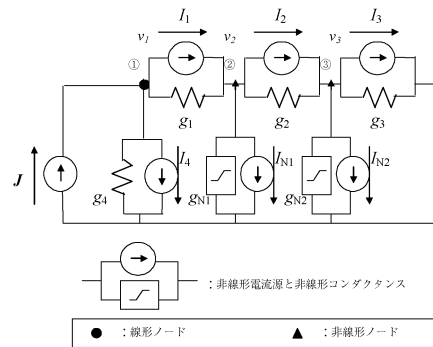


図3 Dommel法適用後の回路

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1+g_4 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1+g_2+g_{N1} & -g_2 \\ 0 & -g_2 & g_2+g_3+g_{N2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J - I_1 - I_4 \\ I_1 - I_2 - I_{N1} \\ I_2 - I_3 - I_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

これらを用いた回路方程式は

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

但し、コンダクタンス行列は対称行列である。この回路方程式を解き、節点電圧ベクトル \mathbf{v} を求めることが出来る。各素子の端子間電圧は各ノードの電圧 v_i の差で表され、(5)式、(8)式からもわかるように過去の履歴に依存する電流源を更新するために使われる。

2.3 複合収束計算法

複合収束計算法^[3]は、修正予測子-修正子法 (MPCI法) とニュートン・ラブソン法 (NRI法) からなる。これらの収束計算法を用いるための回路方程式は非線形要素を含む場合、同じ型の式で表現でき、

$$\mathbf{G} \mathbf{v}^{(0)}(t) = \mathbf{J}(t) + \mathbf{J}(t, \mathbf{v}(t - \Delta t)) \tag{13}$$

$$\mathbf{G} \mathbf{v}^{(k)}(t) = \mathbf{J}(t) + \mathbf{J}(t, \mathbf{v}^{(k-1)}(t)) \tag{14}$$

となる^[3]。通常、ニュートン・ラブソン法は回路方程式

の中にヤコビアン行列を含むが、非線形要素を非線形電流源と非線形コンダクタンスで表現する場合、上記の式のように簡略変形できる。但し、コンダクタンス行列 \mathbf{G} に含まれる非線形要素を表すコンダクタンス (図3では g_{N1}, g_{N2}) は修正予測子-修正子法では図4に示すように区分線形近似のコンダクタンスを示し、非線形要素の性質を線形近似して表現する方法である。ニュートン・ラプソン法でのコンダクタンスは、その点での di/dt の値により決定する。例えば図4の非線形特性 (v_N, i_N) を表現するために用いられるコンダクタンスは、修正予測子-修正子法であれば g_B 、ニュートン・ラプソン法では $\left. \frac{di}{dv} \right|_{i=i_N}$ となる。このコンダクタンスと、 $i = f(v)$ の非線形特性を記述するために電流源 J_N が並列接続され、以下のように非線形特性が表現される。

$$i_N = f(v) = g_B \cdot v_N + J_N \quad \dots \text{(MPCI法)} \quad (15)$$

$$i_N = f(v) = \left. \frac{di}{dv} \right|_{i=i_N} \cdot v_N + J_N \quad \dots \text{(NRI法)} \quad (16)$$

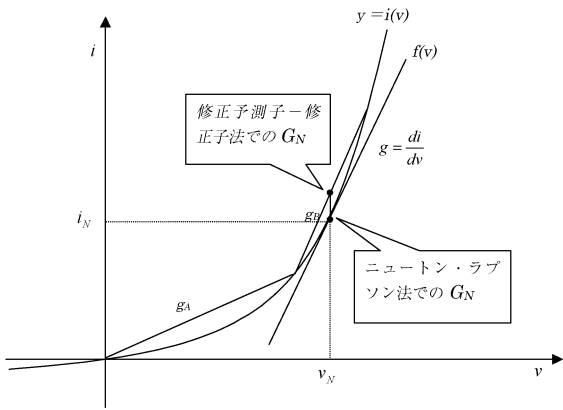


図4 MPCI法とNRI法によるコンダクタンスの表現

3. コンダクタンス行列の縮約

3.1 LU分解法

(12)式を効率よく解くために、LU分解法を用いる。LU分解法は機械的にコンダクタンス行列を下三角行列と上三角行列に分解できるが、そのうち最も効率のよい手法として、クラウトのアルゴリズム ((17)式、(18)式)がある。この式を用いてLU分解を実行すると、L行列 (下三角行列)・U行列 (上三角行列) はそれぞれ(19)式、(20)式となる。

$$U_{ij} = G_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} \quad (17)$$

$$L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}} \left(G_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj} \right) \quad (18)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g_1}{g_1+g_4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{g_2}{A} & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1+g_4 & -g_1 & 0 \\ 0 & A & -g_2 \\ 0 & 0 & -\frac{g_2^2}{A} + g_2 + g_3 + g_{N2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

但し、

$$A = \frac{1}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_4}} + g_2 + g_{M1}$$

ここで、コンダクタンス行列を \mathbf{G} 、節点電圧ベクトルを \mathbf{v} 、電流源ベクトルを \mathbf{J} とすると次の(21)式の関係が成り立つ。

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{J} \quad (21)$$

\mathbf{L} 行列・ \mathbf{U} 行列を用いて(21)式を解く場合、まずより $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{J}$ より \mathbf{y} を求める。そして $\mathbf{U} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y}$ より真の解 \mathbf{v} が求まる。このとき、 \mathbf{L} 、 \mathbf{U} は三角行列のため、

$$y_1 = \frac{J_1}{L_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left[J_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} y_j \right] \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (22)$$

$$v_N = \frac{y_N}{U_{NN}}, \quad v_i = \frac{1}{U_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^N U_{ij} v_j \right] \quad i = N-1, \dots, 1 \quad (23)$$

の前進代入、後退代入の式よりあらゆる \mathbf{J} に対し、簡単に \mathbf{v} を求めることができる。

3.2 コンダクタンス行列の縮約

作成したコンダクタンス行列の非線形部分のみに注目し、収束計算のために \mathbf{G} 行列を縮約する。この手法を用いることで計算時間の大幅な短縮が可能となる。

まず(21)式の $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{J}$ でクラウトのアルゴリズムを適用した場合、(19)式、(20)式からも明らかなように非線形となる要素は L_{32} 、 U_{22} 、 U_{23} 、 U_{33} の部分である。つまりそれ以外の部分はすべて線形で、すべてのシミュレーション時間中一定となる。そのため収束計算が行われる非線形コンダクタンス $\mathbf{G}_N = \mathbf{L}_N \cdot \mathbf{U}_N$ は

$$\mathbf{L}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{32} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_N = \begin{bmatrix} U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N = \mathbf{L}_N \cdot \mathbf{U}_N &= \begin{bmatrix} U_{22} & U_{23} \\ L_{32} U_{22} & U_{32} U_{23} + U_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_4}} + g_2 + g_{M1} & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_{N2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。但し、 $g_2 + g_3 + g_{N2}$ はコンダクタンス g_2 、 g_3 、 g_{N2} の並列接続を表わし、 $1/(1/g_1 + 1/g_4)$ は $g_1 + g_4$ の直列接続を表わす。

非線形コンダクタンス行列 G_N は縮約された回路のコンダクタンス行列を表わし、行列の各要素は非線形となる。そこで、次節で示すように、この行列と等価な回路を導出することができる。

3.3 LU分解と等価回路

図2の例題回路より、G行列、J行列は(11)式、(12)式となり、回路方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_4 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_{N1} & -g_2 \\ 0 & -g_2 & g_2 + g_3 + g_{N2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J - I_1 - I_4 \\ I_1 - I_2 - I_{N1} \\ I_2 - I_3 - I_{N2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここで v_1 、 v_2 、 v_3 は各ノード電圧を表わす。

コンダクタンス行列の縮約化に伴い、回路方程式も変化するため、 J も左辺からの移項分(線形要素より構成される部分)を含み変化する。縮約化された電流ベクトルを J_N とし、LU分解を利用して回路方程式を導出すると、一般に(27)式～(29)式となる。

$$\begin{aligned} G_N \cdot v_N &= (L_N \cdot U_N) \cdot v_N = L_N \cdot (U_N \cdot v_N) \\ &= L_N \cdot y_N = J_N \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} L_{M+1M+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{NM+1} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{M+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{M+1} - \sum_{i=1}^M L_{M+1i} y_i \\ \vdots \\ J_N - \sum_{i=1}^M L_{Ni} y_i \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} U_{M+1M+1} & \cdots & U_{M+1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & U_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{M+1} \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{M+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad (29)$$

特に、図3の例題回路の場合、それぞれ要素を代入すると(30)式、(31)式となる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{g_2}{A} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2 - L_{21} y_1 \\ J_3 - L_{31} y_1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} A & -g_2 \\ -g_2 & -\frac{g_2^2}{A} + g_2 + g_3 + g_{N2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

但し、

$$A = \frac{1}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_4}} + g_2 + g_{N1}$$

y_1 は(22)式から判るように線形要素のみから計算される部分であり、すべての収束ステップ中一定である。 L_{21} 、 L_{31} も同様に線形要素のみから計算される部分である。

(30)式の y_1 は(32)式のように計算でき、(30)式の y 行列に(31)式の左辺を代入すると、(33)式のような縮約された等価回路方程式が導出される。

$$y_1 = \frac{1}{L_{11}} J_1 = J_1 = J - I_1 - I_4 \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_4}} + g_2 + g_{N1} & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_{N2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$= \begin{bmatrix} I_1 - I_2 - I_{N1} + \frac{g_1}{g_1 + g_4} (J - I_1 - I_4) \\ I_2 - I_3 - I_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2 - \frac{g_1}{g_1 + g_4} J_1 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

次にこの回路方程式より縮約後の等価回路を導出すると、図5となる。この回路は図3の線形・非線形ノードを含む回路を収束計算のために効率よく非線形ノードのみを含む回路に縮約している。

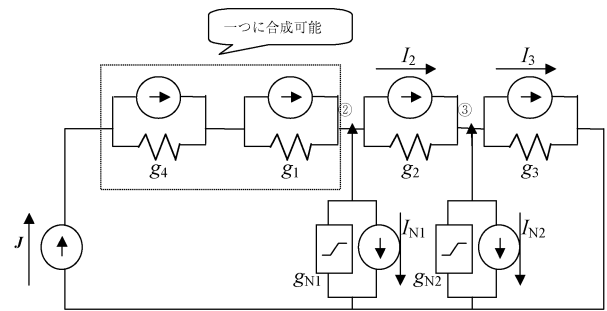


図5 回路縮小後の等価回路

以上の縮約法を、ノード数 N の一般的な回路(線形ノード1～ M 、非線形ノード $M+1$ ～ N)に拡張すると図6、7となる。図6は線形ノードが順に縮約される手順が示されている。図7はあるノード(ここではノード1)を縮約した場合に周囲のノード間に発生する等価回路要素が示されている。

3.4 一般的回路による縮約

一般的な4ノードの回路を図8に示す。ノード①が線形、ノード②～④が非線形とする。図8(a)から節点解析法を用いコンダクタンス行列を導出すると、

$$G = \begin{bmatrix} G_A & -g_{12} & -g_{13} & -g_{14} \\ -g_{12} & G_B & -g_{23} & -g_{24} \\ -g_{13} & -g_{23} & G_C & -g_{34} \\ -g_{14} & -g_{24} & -g_{34} & G_D \end{bmatrix} \quad (34)$$

但し

$$G_A = g_{12} + g_{13} + g_{14} + g_{10}$$

$$G_B = g_{12} + g_{23} + g_{24} + g_{20}$$

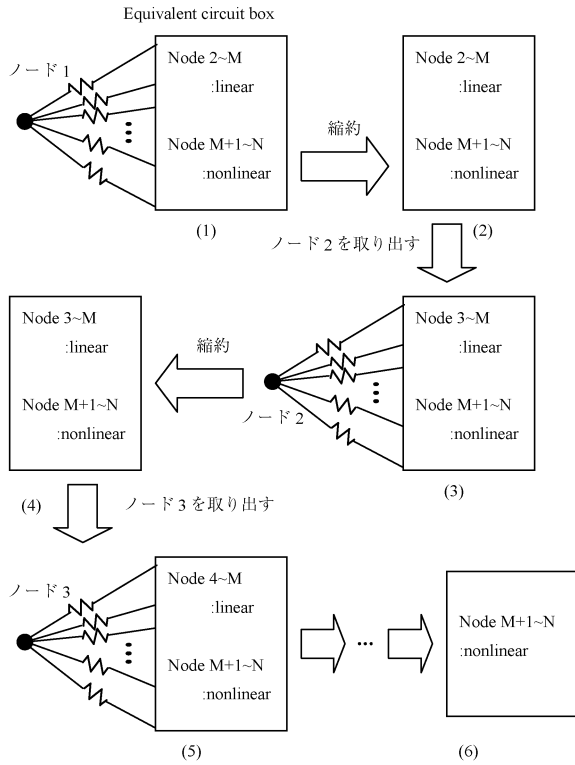
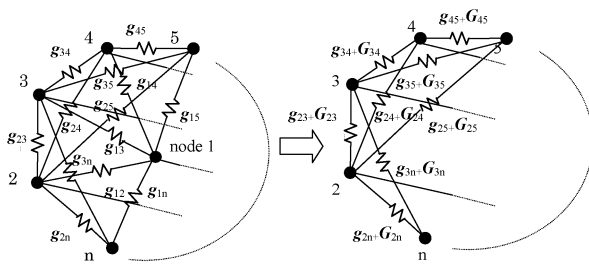


図6 回路縮約の手順

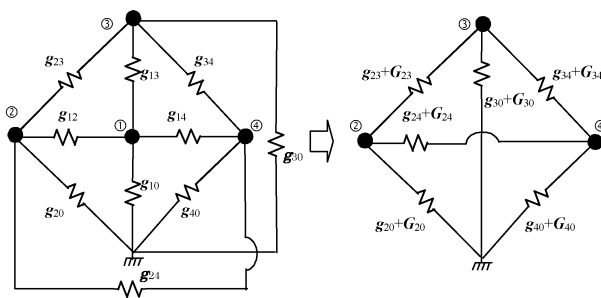


$$G_{23} = \frac{g_{12}g_{13}}{G_A}, G_{24} = \frac{g_{12}g_{14}}{G_A}, G_{25} = \frac{g_{12}g_{15}}{G_A}, G_{2n} = \frac{g_{12}g_{1n}}{G_A}$$

$$G_{34} = \frac{g_{13}g_{14}}{G_A}, G_{35} = \frac{g_{13}g_{15}}{G_A}, G_{3n} = \frac{g_{13}g_{1n}}{G_A}, G_{45} = \frac{g_{14}g_{15}}{G_A}$$

$$G_A = g_{12} + g_{13} + g_{14} + g_{15} + \dots + g_{1n}$$

図7 ノード数nの回路を縮約した等価回路



(a)縮約前

(b)縮約後

図8 4ノード例題回路

$$G_C = g_{13} + g_{23} + g_{34} + g_{30}$$

$$G_D = g_{14} + g_{24} + g_{34} + g_{40}$$

となり、縮約後のコンダクタンス行列は

$$G_n = \begin{bmatrix} -\frac{g_{12}^2}{G_A} + G_B & -\frac{g_{12}g_{13}}{G_A} - g_{23} & -\frac{g_{12}g_{14}}{G_A} - g_{24} \\ -\frac{g_{12}g_{13}}{G_A} - g_{23} & -\frac{g_{13}^2}{G_A} + G_C & -\frac{g_{13}g_{14}}{G_A} - g_{34} \\ -\frac{g_{12}g_{14}}{G_A} - g_{24} & -\frac{g_{13}g_{14}}{G_A} - g_{34} & -\frac{g_{14}^2}{G_A} + G_D \end{bmatrix} \quad (35)$$

となる。但し、

$$G_{23} = \frac{g_{12}g_{13}}{G_A}, G_{24} = \frac{g_{12}g_{14}}{G_A}, G_{34} = \frac{g_{13}g_{14}}{G_A}$$

$$G_{20} = \frac{g_{12}g_{10}}{G_A}, G_{30} = \frac{g_{13}g_{10}}{G_A}, G_{40} = \frac{g_{14}g_{10}}{G_A}$$

式(35)に基づく縮約後の等価回路を図8(b)に示す。

4. 結 言

複合収束計算法は他の収束計算法に比べて、非常に高い精度と安定性を持っている。本提案手法は、各種収束計算法を過渡解析に適用することで計算時間が大きくなる問題を解決する。そして、これまで敬遠されがちになっていた非線形過渡解析への収束計算法の応用において、計算時間を短縮する非常に有効な手段である。

解析回路の線形ノード数と非線形ノード数の比に依存するが、今回の手法をこれら例題回路に比べ比較的大きな実回路に適用することで、計算時間は飛躍的に減少することが予測される。

また、この収束計算法は節点方程式を基本方程式としているため、容易に他の回路シミュレーターに適用でき、汎用性を有する点もこの手法の長所である。

参考文献

- [1] SPICE Version 2G User's Guide
- [2] Omprakash Nayak, Garth Irwin, et al., "GUI Enhances Electromagnetic Transient Simulation Tools", IEEE Computer Applications in Power, Vol.8, No.1, 1995
- [3] K. Yamamoto, et al., "An Improvement of Computation Error Caused by an Linear Interpolation method", International Conference on Electrical Engineering 2002, Vol. V, pp.2253-2258, July 7-11 2002
- [4] K. Yamamoto, et al., "A Study of Subsidiary Techniques Based on Combined Iterative Method for a Nonlinear Transients Analysis", 電学論B, Vol.123-B, No.2, 2002

- [5] H. W. Dommel, "Digital Computer Solution of Electro-magnetic Transients in Single- and Multi-Phase Networks", IEEE Trans., Power App. And Syst., Vol. PAS-88 (4), pp.388-399, 1969
- [6] W. H. Press, et al, "Numerical Recipes", Cambridge University Press