Orthomodular lattice のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for orthomodular lattices

Kenichi　ARAGANE

2つの2項演算$\wedge$, $\vee$をもつ代数系で交換律と結合律と吸収律が成り立つものが束（lattice）である．最小元0と最大元1をもつ束を有界束（bounded lattice）という．有界束が1項演算 ' をもち $x \wedge x' = 0$ と $x \leq y' \Rightarrow y \leq x'$ を満たすとき，擬補束（pseudo-complemented lattice）という．擬補束がさらに $x'' = x$ を満たすとき，直交束（ortholattice）という．束では $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ は成り立つが，逆が成り立たないから一般には分配律 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ は成り立たない（[4]）．そこで y, z のうち 1つが $\leq x$, 他方が $\leq x'$ を満たすときだけ分配律が成り立つとする．つまり，分配律を弱めた形のモジュラー律 $z \leq x$ かつ $y \leq x' \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ を考える．直交束がこのモジュラー律を満たすとき，オーソモジュラー束（orthomodular lattice）という（[3]）．直交束に演繹的に同値な，G. Gentzen の方法（[2]）でのシーケント(式)による形式的体系は [7]で与えられている．また，オーソモジュラー束についても[5]で与えられている．本論文では，[5]と異なる形で [1]と同じ方法によりオーソモジュラー束と演繹的に同値な，シーケントによる形式的体系 GOM を考える．

§1　ワード

[1] と同様にワードを定義する．

[定義 1]（ワードの定義）

(1)　定数 0, 1 はワードである．

(2)　変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである．

(3)　x と y がワードのとき $x \wedge y$, $x \vee y$, x' はワードである．

(4)　以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである．

ワード全体の集合を A とし，代数系 $\mathbf{A} = (A ; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ を考える．

§2　OM

[1] と同じ方法でオーソモジュラー束を定義する．

[定義 2]（ OMの定義 ）

A の任意の元 x, y, z に対して，次の $F1 \sim F10^{\circ}$ が成り立つとき，代数系 $\mathbf{A}$ をオーソモジュラー束（orthomodular lattice, OM ）とよぶ．

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1^{\circ}$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2^{\circ}$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3^{\circ}$	$x \vee x = x$

$F4$　$x \wedge y = y \wedge x$　　$F4^\circ$　$x \vee y = y \vee x$

$F5$　$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$　　$F5^\circ$　$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

$F6$　$x \wedge (x \vee y) = x$　　$F6^\circ$　$x \vee (x \wedge y) = x$

$F7$　$x'' = x$

$F8$　$(x \wedge y)' = x' \vee y'$　　$F8^\circ$　$(x \vee y)' = x' \wedge y'$

$F9$　$x \wedge x' = 0$　　$F9^\circ$　$x \vee x' = 1$

$F10$　$x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) = x \wedge y$　　$F10^\circ$　$x \vee (x' \wedge (x \vee y)) = x \vee y$

[1] と同様に 2 項関係 $\leq$ を定義する.

[定義 3]（不等式の定義）

x, y を A の任意の元とする. $x \wedge y = x$ が成り立つとき, $x \leq y$ と書く. つまり, $x \leq y$ は $x \wedge y = x$ の略記である.

[注意 1]（$F4$）～（$F6^\circ$）が成り立つとき, $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ が成り立つ.

（ 証明 ）

$\Rightarrow$: $x \leq y$ とすると $x \wedge y = x$ から $y = y \vee (y \wedge x) = y \vee (x \wedge y) = y \vee x = x \vee y$.

$\Leftarrow$: $x \vee y = y$ とする. $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$ から $x \leq y$.　（証明終）

[1] と同様に, 次のことが成り立つ.

[注意 2]（$F4$）～（$F6^\circ$）が成り立つとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

(1)　$x \leq y, u \leq v \Rightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$（$\wedge$についての単調性）

(2)　$x \leq y, u \leq v \Rightarrow x \vee u \leq y \vee v$（$\vee$についての単調性）

（ 証明 ）

(1) : $x \leq y, u \leq v$ とすると $x \wedge y = x, u \wedge v = u$ で $(x \wedge u) \wedge (y \wedge v) = (x \wedge y) \wedge (u \wedge v) = x \wedge u$ から $x \wedge u \leq y \wedge v$ が成り立つ.

(2) : $x \leq y, u \leq v$ とすると注意 1 より $x \vee y = y, u \vee v = v$ で $(x \vee u) \vee (y \vee v) = (x \vee y) \vee (u \vee v) = y \vee v$ から $x \vee u \leq y \vee v$ が成り立つ.　（証明終）

[1] と同じ方法で次の定理を示す.

[定理 1]

代数系 **A** が オーソモジュラー束 (OM) であり（つまり $F1$ ～ $F10^\circ$ が成り立つ), かつ定義 3 により $x \leq y$ が定義される $\Leftrightarrow$ A の任意の元 x, y, z に対して, 次の $T1$ ～ $T11^\circ$ が成り立つ.

$T1$　$x \leq x$

$T2$　$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

$T3$　$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$T4$　$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$

$T5$　$0 \leq x$　　$T5^\circ$　$x \leq 1$

$T6$　$x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y$　　$T6^\circ$　$x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$

$T7$　$z \leq x, z \leq y \Rightarrow z \leq x \wedge y$　　$T7^\circ$　$x \leq z, y \leq z \Rightarrow x \vee y \leq z$

$T8$　$x \leq y \Leftrightarrow y' \leq x'$

$T9$　$x \leq x''$

$T10$　$x \wedge x' \leq y$　　$T10^\circ$　$y \leq x \vee x'$

$T11$　$x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \leq y$　　$T11^\circ$　$x \vee (x' \wedge (x \vee y)) \geq y$

（ 証明 ）

$\Rightarrow$:

$T1$:　$F3$ と定義 3 から成り立つ.

$T2$:　$x \leq y$, $y \leq x$ とすると $x \wedge y = x, y \wedge x = y$ より $F4$ から $x = y$ が成り立つ.

$T3$： $x \leq y,\ y \leq z$ とすると $x = x \wedge y,\ y = y \wedge z$ より $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$ から $x \leq z$ が成り立つ．

$T4$： 注意 1 から成り立つ．

$T5$： $F1, F4$ から成り立つ．

$T5^{\circ}$： $F2$ から成り立つ．

$T6$： $(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$ より $x \wedge y \leq x$ が成り立つ．同様にして $x \wedge y \leq y$ も成り立つ．

$T6^{\circ}$： $F6$ から $x \leq x \vee y$ が成り立つ．$y \wedge (x \vee y) = y$ から $y \leq x \vee y$ も成り立つ．

$T7$： $z \leq x,\ z \leq y$ とすると $z \wedge x = z,\ z \wedge y = z$ より $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$ から $z \leq x \wedge y$ が成り立つ．

$T7^{\circ}$： $T7$と双対にできる．

$T8$： $\Rightarrow$ ：$x \leq y$ とすると $x \wedge y = x$．$(x \wedge y)' = x'$ より $F8$ から $x' \vee y' = x'$ で $y' \leq x'$ が成り立つ．
$\Leftarrow$ ：$y' \leq x'$ とすると 上の $\Rightarrow$ より $x'' \leq y''$．$F7$ から $x \leq y$ が成り立つ．

$T9$： $x \wedge x'' = x \wedge x = x$ から成り立つ．

$T10$：$(x \wedge x') \wedge y = 0 \wedge y = 0 = x \wedge x'$ から成り立つ．

$T10^{\circ}$：$T10$ と双対にできる．

$T11$：$F10$ より $(x \wedge (x' \vee (x \wedge y))) \wedge y = (x \wedge y) \wedge y = x \wedge y = x \wedge (x' \vee (x \wedge y))$ から成り立つ．

$T11^{\circ}$：$T11$ と双対にできる．

$\Leftarrow$：

（定義 3）$x \leq y \ \Leftrightarrow\ x \wedge y = x$ であること：$\Rightarrow$ について．$x \leq y$ とする．$T1$ とこれに $T7$ を使って $x \leq x \wedge y$．
また $T6$ より $x \wedge y \leq x$．よって $T2$ から $x \wedge y = x$ が成り立つ．
$\Leftarrow$ について．$x \wedge y = x$ とする．$T6$ の $x \wedge y \leq y$ に代入して $x \leq y$ が成り立つ．

$F4$： $T6$ から $x \wedge y \leq y,\ x \wedge y \leq x$ であり，$T7$ を使うと $x \wedge y \leq y \wedge x$．同様に $y \wedge x \leq x \wedge y$ であるから $T2$より $x \wedge y = y \wedge x$ が成り立つ．

$F4^{\circ}$：$F4$ と 双対にできる．

$F1$： $F5$ と定義 3 と $F4$ から成り立つ．

$F1^{\circ}$：$T5^{\circ}$ と $T4$ から成り立つ．

$F2$： $T5^{\circ}$ と定義 3 から成り立つ．

$F2^{\circ}$： $T5$ と $T4$ と $F4^{\circ}$ から成り立つ．

$F3$： $T1$ と定義 3 から成り立つ．

$F3^{\circ}$： $T1$ と $T4$ から成り立つ．

$F5$： $T6$ より $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge y \leq x,\ y$ から $(x \wedge y) \wedge z \leq x \cdots (1)$．$(x \wedge y) \wedge z \leq y \cdots (2)$．
また $T6$ から $(x \wedge y) \wedge z \leq z \cdots (3)$．(2), (3) に $T7$ を使って $(x \wedge y) \wedge z \leq y \wedge z \cdots (4)$．
(1), (4) に $T7$ を使って $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$．同様にして $x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z$．よって $T2$ から $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ が成り立つ．

$F5^{\circ}$： $F5$ と双対にできる．

$F6$： $T6^{\circ}$ の $x \leq x \vee y$ と定義 3 から成り立つ．

$F6^{\circ}$： $T6$ の $x \wedge y \leq x$ と $T4$ より $(x \wedge y) \vee x = x$ であり，$F4^{\circ}$ から成り立つ．

$F7$： $T9$ の x を x' にすると $x' \leq x'''$ であり，$T8$ の $\Leftarrow$ を使うと $x'' \leq x$．また $T9$ から $x \leq x''$．よって $T2$ から $x'' = x$ が成り立つ．

$F8$： $T6$ の $x \wedge y \leq x,\ y$ に $T8$ を使って $x', y' \leq (x \wedge y)'$ で $T7^{\circ}$ から $x' \vee y' \leq (x \wedge y)' \cdots (1)$．
双対に $x, y \leq x \vee y$ より $(x \vee y)' \leq x', y'$ から $(x \vee y)' \leq x' \wedge y' \cdots (2)$．(2) の x を x' に，y を y' にして $F7$ を使うと $(x' \vee y')' \leq x \wedge y$．これに $T8$ を使うと $(x \wedge y)' \leq (x' \vee y')'' = x' \vee y' \cdots (3)$．
(1), (3) から $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ が成り立つ．

$F8^{\circ}$： $F8$ と双対にできる．

$F9$： $T5, T10$ を使うと $0 \leq x \wedge x' \leq 0$ から $x \wedge x' = 0$ が成り立つ．

$F9^\circ$: $F9$ と双対にできる.

$F10$: $T11$ より $x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \leq y$. これと $T1$ の $x \leq x$ に 注意 2 の(1) を使うと $x \wedge (x \wedge (x' \vee (x \wedge y))) \leq x \wedge y$ で $F3$ から $x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \leq x \wedge y$. また $x \wedge y \leq x' \vee (x \wedge y)$ と $x \leq x$ に注意 2 の(1) を使って $x \wedge y = x \wedge (x \wedge y) \leq x \wedge (x' \vee (x \wedge y))$. よって $x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) = x \wedge y$ が成り立つ.

$F10^\circ$: $F10$ と双対にできる. (証明終)

$T11$ と同値なモジュラー律に次の形のものがある ([3], [5]).

[注意 3] OM において, 次の (1), (2), (3), (4), (5) は互いに同値である.

(1) $z \leq x$ かつ $y \leq x' \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(2) $z \leq x$ かつ $y \leq x' \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \leq z$

(3) $y \leq x \Rightarrow x \wedge (x' \vee y) \leq y$

(4) $x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \leq x \wedge y$

(5) $x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \leq y$

(証明)

(1) ⇒ (2) : $z \leq x$ かつ $y \leq x'$ とすると $x \wedge z = z$. $x \leq x$ と $y \leq x'$ に注意2の(1)を使うと $F9$ より $x \wedge y \leq x \wedge x' = 0$. $T5$ から $0 \leq x \wedge y$ で $x \wedge y = 0$. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee (x \wedge z) = 0 \vee z = z \leq z$.

(2) ⇒ (3) : $y \leq x$ とする. (2) において z を y に, y を x' にすると $y \leq x$ と $x' \leq x'$ を満たすから $x \wedge (x' \vee y) \leq y$.

(3) ⇒ (4) : (3) で y を $x \wedge y$ にすると $x \wedge y \leq x$ を満たすから $x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \leq x \wedge y$.

(4) ⇒ (5) : $x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \leq x \wedge y \leq y$ から成り立つ.

(5) ⇒ (1) : $z \leq x$ かつ $y \leq x'$ とすると $x \wedge z = z$. $y \leq x'$ と $z \leq z$ より $y \vee z \leq x' \vee z$. $x \leq x$ から $x \wedge (y \vee z) \leq x \wedge (x' \vee z)$. (5) で y を z にすると $x \wedge (y \vee z) \leq x \wedge (x' \vee (x \wedge z)) \leq z = x \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. これより $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \cdots (\alpha)$. $x \wedge y \leq x$, $x \wedge z \leq x$ に $T7^\circ$を使うと $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \cdots (\beta)$. 同様に $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$ と $x \wedge z \leq z \leq y \vee z$ から $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq y \vee z \cdots (\gamma)$. (β), (γ) で $T7$ を使うと $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z) \cdots (\delta)$. よって (α), (δ) から $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ が成り立つ. (証明終)

§ 3 GOM

[1] と同様にシーケント (式) を定義する.

[定義 4] (シーケント (式) の定義)

ワードの有限列をギリシア大文字 Γ, Δ などで表す. ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ を Γ とし, $b_1, \ldots, b_n$ を Δ とするとき, OM での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント (式) $\Gamma \to \Delta$ で表す. ただし, Γ が空のとき ($\Gamma = \emptyset$ と書く), $\to b_1 \vee \cdots \vee b_n$ は $1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を意味する. また $\Delta = \emptyset$ のとき, $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \to$ は $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ を意味する. $\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない.

このとき, OM のシーケントによる形式的体系 GOM を次のように定義する ([1], [5], [6], [7]).

[定義 5] (GOM の定義)

[1] 始式

$$(B1)\ a \to a \qquad (B2)\ 0 \to a \qquad (B3)\ a \to 1$$

[2] 推論規則

(1) 構造に関する推論規則 :

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{a. \Gamma \to \Delta}\ (w \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, a}\ (\to w)$$

$$\frac{a, a, \Gamma \to \Delta}{a, \Gamma \to \Delta}\ (c \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, a, a}{\Gamma \to \Delta, a}\ (\to c)$$

$$\frac{\Gamma_1, a, b, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, b, a, \Gamma_2 \to \Delta}\ (e \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta_1, a, b, \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1, b, a, \Delta_2}\ (\to e)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta_1, a \quad a \to \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1, \Delta_2}\ (\mathrm{cut}1) \qquad \frac{\Gamma_1 \to a \quad a, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, \ \Gamma_2 \to \Delta}\ (\mathrm{cut}2)$$

(2) 論理記号に関する推論規則：

$$\frac{a, \Gamma \to \Delta}{a \wedge b, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge_1 \to) \qquad \frac{b, \Gamma \to \Delta}{a \wedge b, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge_2 \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, a}{\Gamma \to \Delta, a \vee b}\ (\to \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, b}{\Gamma \to \Delta, a \vee b}\ (\to \vee_2)$$

$$\frac{a \to \Delta \quad b \to \Delta}{a \vee b \to \Delta}\ (\vee \to) \qquad \frac{\Gamma \to a \quad \Gamma \to b}{\Gamma \to a \wedge b}\ (\to \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Delta', \Gamma \to}\ ({}' \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\to \Delta, \Gamma'}\ (\to {}')$$

$$\frac{a, \Gamma \to \Delta}{a'', \Gamma \to \Delta}\ ({}'' \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, a}{\Gamma \to \Delta, a''}\ (\to {}'')$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Delta' \to \Gamma'}\ ({}' \to {}')$$

$$\frac{b' \to a' \quad a', b \to}{a' \to b'}\ (\mathrm{OM}1) \qquad \frac{\to b, a' \quad a' \to b'}{b' \to a'}\ (\mathrm{OM}2)$$

ただし, Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき Γ' は $a_m', \ldots, a_1'$ を表し, $\Gamma = \emptyset$ のときは $\Gamma' = \emptyset$ とする.

[定義 6] （$\vdash$ の定義）

シーケント $\Gamma \to \Delta$ が GOM で証明可能であるとき, $\vdash \Gamma \to \Delta$ と書く.

[注意 4] GOM において次のことが成り立つ.

(1) $\vdash a, b, \Gamma \to \Delta \iff \vdash a \wedge b, \Gamma \to \Delta$

(2) $\vdash \Gamma \to \Delta, a, b \iff \vdash \Gamma \to \Delta, a \vee b$

(3) $\dfrac{a'', \Gamma \to \Delta}{a, \Gamma \to \Delta}$ (4) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, b''}{\Gamma \to \Delta, b}$

（証明）

(1)：$\Rightarrow$ について.

$$\dfrac{\dfrac{a, b, \Gamma \to \Delta}{a \wedge b, a \wedge b, \Gamma \to \Delta}}{a \wedge b, \Gamma \to \Delta}$$

$\Leftarrow$ について.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to a}{a, b \to a} \quad \dfrac{b \to b}{a, b \to b}}{a, b \to a \wedge b} \qquad a \wedge b, \Gamma \to \Delta}{a, b, \Gamma \to \Delta}$$

(2)：(1) と双対にできる.

(3)：

$$\dfrac{\dfrac{a \to a}{a \to a''} \qquad a'', \Gamma \to \Delta}{a, \Gamma \to \Delta}$$

(4)：(3) と双対にできる. （証明終）

［注意５］　GOM － cut 1 － cut 2 ＋ cut ＝ LK　つまり，GOM の cut 1, cut 2 の代わりに，cut formula を含む両辺に parameter を入れた普通の cut を追加すると 古典論理（classical logic, LK）に一致する．

$$\dfrac{\Gamma_1 \to \Delta_1, a \qquad a, \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2}\ (\mathrm{cut})$$

（証明）

LK の 4 つの推論規則（ $'\to$, $\to '$, $\to \wedge$, $\vee \to$ ）を示せばよい．

（ $'\to$ ）：

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, a \qquad \dfrac{a \to a}{a, a' \to}}{\Gamma\ a', \to \Delta}}{a', \Gamma \to \Delta}$$

（ $\to '$ ）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to a}{\to a', a,} \qquad a, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to a', \Delta}}{\Gamma \to \Delta, a'}$$

（ $\to \wedge$ ）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, a}{\Gamma, \Delta' \to a} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Delta, b}{\Gamma, \Delta' \to b}}{\Gamma, \Delta' \to a \wedge b}}{\Gamma \to \Delta'', a \wedge b}}{\Gamma \to \Delta, a \wedge b}$$

（ $\vee \to$ ）：（ $\to \wedge$ ）と相対にできる．

（証明終）

GOM において，モジュラー律に関する推論規則について，次の同値性が成り立つ．

［注意６］　GOM において次の (1) ～ (5) は互いに同値である．また，双対に (1°) ～ (5°) も互いに同値である．

(1) $$\dfrac{b \to a}{a' \vee b, a \to b}$$

(1°) $$\dfrac{a \to b}{b \to a, a' \wedge b}$$

(2) $\vdash a' \vee (a \wedge b), a \to a \wedge b$

(2°) $\vdash a \vee b \to a, a' \wedge (a \vee b)$

(3) $$\dfrac{\Delta \to a \quad b \to a}{a' \vee b, \Delta \to b}$$

(3°) $$\dfrac{a \to b \quad a \to \Delta}{b \to \Delta, a' \wedge b}$$

(4) $$\dfrac{b, \Sigma \to \Gamma \quad \Delta \to a \quad b \to a}{a' \vee b, \Sigma, \Delta \to \Gamma}$$

(4°) $$\dfrac{a \to b \quad a \to \Delta \quad \Gamma \to \Sigma, b}{\Gamma \to \Delta, \Sigma, a' \wedge b}$$

(5) $$\dfrac{b' \to a' \quad a', b \to}{a' \to b'}\ (\mathrm{OM1})$$

(5°) $$\dfrac{\to b, a' \quad a' \to b'}{b' \to a'}\ (\mathrm{OM2})$$

（証明）

(1) ⇒ (2)：

$$\dfrac{\dfrac{a \to a}{a \wedge b \to a}}{a' \vee (a \wedge b), a \to a \wedge b}\ (1)$$

(2) ⇒ (3)：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a' \to a'}{a' \to a' \vee (a \wedge b)} \quad \dfrac{\dfrac{b \to a \quad b \to b}{b \to a \wedge b}}{b \to a' \vee (a \wedge b)}}{a' \vee b \to a' \vee (a \wedge b)} \qquad \dfrac{\Delta \to a \qquad \dfrac{(2)\ \ a' \vee (a \wedge b), a \to a \wedge b \qquad \dfrac{b \to b}{a \wedge b \to b}}{a' \vee (a \wedge b), a \to b}}{a' \vee (a \wedge b), \Delta \to b}}{a' \vee b, \Delta \to b}$$

(3) ⇒ (4)：

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to a \quad b \to a}{a' \vee b, \Delta \to b}\,(3) \qquad b, \Sigma \to \Gamma}{a' \vee b, \Sigma, \Delta \to \Gamma}$$

(4) ⇒ (5)：(4)で a を a' に, b を b' に, Γ を b' に, Δ を a' に, $\Sigma = \emptyset$ とすると

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a', b \to}{\to b', a''}}{\to a'' \vee b'} \qquad \dfrac{b' \to b' \quad a' \to a' \quad b' \to a'}{a'' \vee b', \ a' \to b'}\ (4)}{a' \to b'}$$

(5) ⇒ (1)：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b \to b}{b \to a' \lor b} \quad b \to a}{b \to (a' \lor b) \land a}}{b'' \to ((a' \lor b) \land a)''} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to a}{a'' \to a}}{a'' \land b' \to a}}{a' \to (a'' \land b')'} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{b' \to b'}{a'' \land b' \to b'}}{b'' \to (a'' \land b')'}}{b \to (a'' \land b')'}}{a' \lor b \to (a'' \land b)'} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to a}{a \to a''}}{a, b' \to a''} \quad \dfrac{b' \to b'}{a, b' \to b'}}{a, b' \to a'' \land b'}}{(a'' \land b')', a, b' \to}}{a' \lor b, a, b' \to}}{(a' \lor b) \land a, b' \to}}{((a' \lor b) \land a)'', b' \to}}{((a' \lor b) \land a)'' \to b''}\ (\mathrm{OM1})}{(a' \lor b) \land a \to b}}{a' \lor b, a \to b}
$$

(証明終)

§4　OM と GOM の演繹的同値性

[定義 7]　(⊨ の定義)
不等式 $a \leq b$ が OM で成り立つとき, ⊨ $a \leq b$ と書く.

[定義 8]　(OM での等号の定義)
a, b をワードとする. $\vdash a \to b$ かつ $\vdash b \to a$ のとき $a \equiv b$ とすれば, $\equiv$ は同値関係である. そこで $A/\equiv$,(A の $\equiv$ による商集合) をあらためて A とし, $\equiv$ を $=$ とみなしたものを OM での等号とする. (つまり, リンデンバウム代数 (Lindenbaum algebra) を考える.)

このとき, [1] と同じ方法で, 次の定理 2 と定理 3 を示すことができる.

[定理 2]　a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

⊨ $a \leq b$　ならば　$\vdash a \to b$

(証明)

OM のすべての公理 ($F1$ ～ $F10^\circ$) が GOM で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1$ ～ $T11^\circ$ が GOM で証明可能であることを示す.

$T1$：　始式 ($B1$) から成り立つ.

$T2$：　定義 8 から成り立つ.

$T3$：　$\dfrac{x \to y \quad y \to z}{x \to z}$

$T4$：⇒：　$\dfrac{x \to y \quad y \to y}{x \lor y \to y}$　　$\dfrac{y \to y}{y \to x \lor y}$　　⇐：　$\dfrac{\dfrac{x \to x}{x \to x \lor y} \quad x \lor y \to y}{x \to y}$

$T5$：　始式 ($B2$) から成り立つ.

$T5^\circ$：　始式 ($B3$) から成り立つ.

$T6$：　$\dfrac{x \to x}{x \land y \to x}$　　$\dfrac{y \to y}{x \land y \to y}$

$T6^\circ$：　$T6$ と双対である.

$T7$：　$\dfrac{z \to x \quad z \to y}{z \to x \land y}$

$T7^\circ$：　$T7$ と双対である.

$T8$：⇒： $\dfrac{x \to y}{y' \to x'}$ ⇐： $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \to x}{x \to x''} \qquad \dfrac{y' \to x'}{x'' \to y''}}{x \to y''}}{x \to y}$$

$T9$： $\dfrac{x \to x}{x \to x''}$

$T10$： $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \to x}{x', x \to}}{x \wedge x', x \wedge x' \to}}{x \wedge x' \to}}{x \wedge x' \to y}$$

$T10^{\circ}$：$T10$ と双対である．

$T11$：別表

$T11^{\circ}$：$T11$ と双対である． （証明終）

［定理３］ $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき，次のことが成り立つ．

$\vdash a_1, \ldots, a_m \to b_1, \ldots, b_n$ ならば $\models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$

（証明）

Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x などで表す．また，Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y などで表す．GOM の始式（$B1$），（$B2$），（$B3$）はそれぞれ $T1$, $T5$, $T5^{\circ}$ から OM で成り立つ．

次に，GOM の各推論規則の上式（上のシーケント）に対応する不等式が OM で成り立つと仮定するとき，下式に対応する不等式が OM で成り立つことを示せばよい．

$(w \to)$：$x \leq y$ とする．$T6$ から $a \wedge x \leq x \leq y$.

$(\to w)$：$(w \to)$ と双対である．

$(c \to)$：$a \wedge a \wedge x \leq y$ とする．$F3$ より $a \wedge a = a$ で $a \wedge x \leq y$.

$(\to c)$：$(c \to)$ と双対である．

$(e \to)$：$x_1 \wedge a \wedge b \wedge x_2 \leq y$ とする．$F4$ より $a \wedge b = b \wedge a$ で $x_1 \wedge b \wedge a \wedge x_2 \leq y$.

$(\to e)$：$(e \to)$ と双対である．

(cut 1)：$x \leq y \vee a$ かつ $a \leq z$ とする．$T1$ より $y \leq y$ であり，注意2の$\vee$についての単調性から $y \vee a \leq y \vee z$. これと仮定 $x \leq y \vee a$ から $x \leq y \vee z$ が成り立つ．

(cut 2)：$x \leq a$ かつ $a \wedge y \leq z$ とする．$T1$ より $y \leq y$ であり，注意2の$\wedge$についての単調性から $x \wedge y \leq a \wedge y$. これと仮定 $a \wedge y \leq z$ から $x \wedge y \leq z$ が成り立つ．

$(\wedge_1 \to)$：$a \wedge x \leq y$ とする．$T6$ より $a \wedge b \leq a$. $T1$ から $x \leq x$. 注意2の$\wedge$についての単調性を使うと $a \wedge b \wedge x \leq a \wedge x$. 仮定と $T3$ から $a \wedge b \wedge x \leq y$.

$(\wedge_2 \to)$：$(\wedge_1 \to)$ と同様にできる．

$(\to \vee_i)$：$(\wedge_i \to)$ と双対である．

$(\vee \to)$：$a \leq x$ かつ $b \leq x$ とすると $T7^{\circ}$ から $a \vee b \leq x$ が成り立つ．

$(\to \wedge)$：$(\vee \to)$ と双対である．

$(' \to)$：$x \leq y$ とすると $T8$ より $y' \leq x'$. これと $T1$ の $x \leq x$ に 注意２の(1)を使うと $F9$ から $x \wedge y' \leq x \wedge x' = 0$. よって $y' \wedge x \leq 0$ が成り立つ．

$(\to ')$：$(' \to)$ と双対である．

$('' \to)$：$a \wedge x \leq y$ とする．$F7$ の $a'' = a$ から $a'' \wedge x \leq y$ が成り立つ．

$(' \to ')$：$x \leq y$ とすると $T8$ より $y' \leq x'$.

(OM1)：$b' \leq a'$ かつ $a' \wedge b \leq 0$ とする．$T5$ の $0 \leq b'$ と仮定から $a' \wedge b \leq b'$. $T8$ と $F8$ より $b'' \leq (a' \wedge b)' = a'' \vee b' = b' \vee a$. これと $T9$ の $b \leq b''$ から $b \leq b' \vee a$. さらに，これと $b \leq b$ に $T7$ を使うと $b \leq b \wedge (b' \vee a) \cdots$ (1). また 仮定 $b' \leq a'$ から $a'' \leq b''$ で $F7$ から $a \leq b$. これに注意3の(3)を使うと $b \wedge (b' \vee a) \leq a$.

*T*11：

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$x \to x$}
\UnaryInfC{$x \wedge y \to x$}
\AxiomC{$x \wedge y \to x \wedge y$}
\UnaryInfC{$x \wedge y \to x' \vee (x \wedge y)$}
\BinaryInfC{$x \wedge y \to x \wedge (x' \vee (x \wedge y))$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$(x \wedge y)'' \to (x \wedge (x' \vee (x \wedge y)))''$}
\AxiomC{$x \to x$}
\UnaryInfC{$x \wedge (x \wedge y)' \to x$}
\UnaryInfC{$x' \to (x \wedge (x \wedge y)')'$}
\AxiomC{$(x \wedge y)' \to (x \wedge y)'$}
\UnaryInfC{$x \wedge (x \wedge y)' \to (x \wedge y)'$}
\UnaryInfC{$(x \wedge y)'' \to (x \wedge (x \wedge y)')'$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$x \wedge y \to (x \wedge (x \wedge y)')'$}
\BinaryInfC{$x' \vee (x \wedge y) \to (x \wedge (x \wedge y)')'$}
\AxiomC{$x \to x$}
\UnaryInfC{$(x \wedge y)',\ x \to x$}
\AxiomC{$(x \wedge y)' \to (x \wedge y)'$}
\UnaryInfC{$(x \wedge y)',\ x \to (x \wedge y)'$}
\BinaryInfC{$(x \wedge y)',\ x \to x \wedge (x \wedge y)'$}
\UnaryInfC{$(x \wedge (x \wedge y)')',\ (x \wedge y)',\ x \to$}
\BinaryInfC{$x' \vee (x \wedge y),\ (x \wedge y)',\ x \to$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$x \wedge (x' \vee (x \wedge y)),\ (x \wedge y)' \to$}
\UnaryInfC{$(x \wedge (x' \vee (x \wedge y)))'',\ (x \wedge y)' \to$}
\RightLabel{(OM1)}
\BinaryInfC{$(x \wedge (x' \vee (x \wedge y)))'' \to (x \wedge y)''$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \to x \wedge y$}
\AxiomC{$y \to y$}
\UnaryInfC{$x \wedge y \to y$}
\BinaryInfC{$x \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \to y$}
\end{prooftree}
$$

これと(1) から $b \leq a$. よって $T8$ から $a' \leq b'$ が成り立つ.
(OM2) : (OM1) と双対である.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

以上により OM と GOM が演繹的に同値であることがわかる.

参考文献

[1] 荒金 憲一, MS代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33 (1998), 119-127.

[2] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen* I, II, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), 176-210, 405-431.

[3] 前田 周一郎, 束論と量子論理, 槙書店 (1980).

[4] 松本 和夫, 情報数学１　束と論理, 森北出版 (1980).

[5] Hirokazu Nishimura, *Sequential method on quantum logic*, Journal of Symbolic Logic 45 (1980), 339-352.

[6] Hirokazu Nishimura, *Proof theory for minimal quantum logic* I, International Journal of Theoretical Physics 33 (1994), 103-113.

[7] Saburo Tamura, *A Gentzen formulation without the cut rule for ortholattices*, Kobe Journal of Mathematics 5 (1988), 133-150.