結び目とそのスパン結び目

安田　智之

A knot and its spun knot

Tomoyuki YASUDA

任意の一次元結び目k^1からは，Artinの構成法により，二次元結び目であるスパン結び目spun(k^1)が構成される。スパン結び目が二次元リボン結び目である事実はよく知られているが、二次元リボン結び目の性質の記述には一次元結び目に定義された概念の拡張概念を用いることができる。二次元リボン結び目における最小交差数の概念（[1]，[2]）もその一つである。これは一次元結び目の古典的不変量である最小交点数の概念からの自然な拡張になっている。本論文では一次元結び目k^1と、そのスパン結び目spun(k^1)に注目し、k^1の最小交差数cr(k^1)とspun(k^1)の最小交差数cr(spun(k^1))との比較を行う。結果としてその差の任意に大きなk^1が存在するという事実を得る。また、そのようなk^1の具体的な構成法も分かる。

0．緒論

Marumoto［3］により次の事実が示された。

「一次元結び目k^1に一つの橋表示を与えて、その十分小さな部分弧δを除いた上で、Artinの方法（[4]，[5]，[6]）でスパン結び目spun(k^1)を構成する時spun(k^1)のリボン表示として$k^1-\delta$の上橋がベースに、下橋がバンドに、各々対応するようなものが構成される。」この観点からすれば、k^1の正則表示の交点がspun(k^1)のリボン交差に対応し、従って一次元結び目の不変量である最小交点数の概念が次のようにspun(k^1)を含む二次元リボン結び目に拡張されるのは自然である。「二次元リボン結び目K^2に対するすべてのリボン表示を考えたときの、リボン交差数の最小数をK^2の最小交差数と呼ぶ。」更に次の事実も自然である。「n交点表示をもつ一次元結び目k^1に対して、二次元リボン結び目spun(k^1)はn交差リボン表示をもつ。」従ってk^1の最小交点数cr(k^1)とspun(k^1)の最小交差数との比較の出発点は次で与えられる。

$$\mathrm{cr}(k^1) - \mathrm{cr}(\mathrm{spun}(k^1)) \geqq 0 .$$

ところがこの評価はあまりよくなく、k^1を任意の一次元結び目としたときは

$$\mathrm{cr}(k^1) - \mathrm{cr}(\mathrm{spun}(k^1)) \geqq 1 ,$$

k^1を任意の非交代一次元結び目としたときは更に

$$\mathrm{cr}(k^1) - \mathrm{cr}(\mathrm{spun}(k^1)) \geqq 2 ,$$

であることが［7］および［8］で指摘された。

本論文では、この右辺がどれ位大きくなれるのかという問題について考える。

1．準備

1.1　定義

$\{D^3_\mu \mid \mu = 1, 2, \cdots, m\}$を四次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^4$内における、互いに交わらない三次元球体の族とし、$\partial D^3_\mu = O^2_\mu$とおく。また$f^r_{i_r j_r}: D^2 \times I \to \mathbb{R}^4$（$r = 1, 2, \cdots, m-1$；$i_r, j_r = 1, 2, \cdots, m$）を像が互いに交わらない埋め込み族とし，次の性質(1)と(2)を満たすものとする。

(1)　$$f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I) \cap O^2_\mu = \begin{cases} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu), \\ f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu), \\ \phi & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

(2)　$$\left(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I)\right) \cup \left(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu\right)$$

は連結。

また、$T = \bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \partial I)$とし、$\mathring{T}$をその内部とする。このとき、二次元球面

$$(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(\partial D^2 \times I)) \cup (\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu) - \mathring{T} = K^2$$

を、(m－1) 融合の二次元リボン結び目（あるいは単に二次元リボン結び目）と呼ぶ。([1], [2])

1.2　定義

定義（1.1）の記号を用いて$\mathcal{O} = \bigcup_{\mu=1}^{m} D^3_\mu$,

$\mathcal{B} = \bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I)$ とおく。この時、対（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のことを二次元リボン結び目K^2のm ベースリボン表示（或いは単にリボン表示）と呼ぶ。また、$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$を各々ベース、バンドと呼ぶ。([1], [2], [3])

1.3　定義

$\mathbb{R}^3_+$と$\mathbb{R}^3_-$を各々$\mathbb{R}^4$において「$x_4 = 0$ かつ$x_3 \geqq 0$」,「$x_4 = 0$ かつ$x_3 \leqq 0$」で定義された上半空間、下半空間とする。このとき、$\mathbb{R}^3_+$に次の四つの式で表された回転を施す。

$$\begin{cases} x'_1 = x_1,\ x'_2 = x_2, \\ x'_3 = x_3 \cos\theta - x_4 \sin\theta, \\ x'_4 = x_3 \sin\theta + x_4 \cos\theta. \end{cases}$$

ここで$\mathbb{R}^2$を、$x_3 = x_4 = 0$ で定義された$\mathbb{R}^4$内の平面とすると、$\mathbb{R}^3_+$は$\mathbb{R}^2$について回転することになる。さて、k^1を$\mathbb{R}^3$内の一次元結び目であって、$k^1 \cap \mathbb{R}^3_-$がプロパーに埋めこまれた自明な弧となっているものとする。$k^1 \cap \mathbb{R}^3_+$に上述の回転を施すことで構成される二次元球面のことをk^1のスパン結び目と呼びspun (k^1) で表す。([4], [5], [6])

1.4　定義

定義（1.1）の記号を用いる。

$\ell_r = f^r_{i_r j_r}(\{0\} \times I)$ (r = 1, 2, …, m－1) とする。但し{0}は定義（1.1）におけるD^2の中心点である。ℓ_rは$\mathcal{O}$と横断的に、しかも有限個の点で交わると仮定してよい。これらの点を（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のリボン交差と呼び、ℓ_rの方向に従って$a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rs_r}$で表すことにする。但し$\ell_r$の方向というのは$O^2_{i_r}$から$O^2_{j_r}$への方向である。また、

$n = \sum_{r=1}^{m-1} s_r$　とおく。このときnのことを（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のリボン交差数という。そうして（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）はn交差リボン表示であるという。更に二次元リボン結び目K^2のすべてのリボン表示を考えたときのリボン交差数の最小値をK^2の最小交差数と呼びcr (K^2) で表す。([1], [2])

2．定理とその証明

緒論の最後に述べた問の答は次の定理で主張されるものである。つまりcr (k^1) とcr (spun (k^1)) の差の幾らでも大きい一次元結び目k^1が存在する。

2.1　定理

任意の自然数nに対し、ある適当な一次元結び目k^1をとると

$$\mathrm{cr}(k^1) - \mathrm{cr}(\mathrm{spun}(k^1)) \geqq n.$$

定理の証明には、次の二つの補題が用いられる。

2.2　補題（[9]）

k^1を（p, q）トーラス結び目とする。この時

$$\mathrm{cr}(k^1) = \begin{cases} p(q-1) & (p \geqq q\text{の時}) \\ q(p-1) & (q \geqq p\text{の時}) \end{cases}$$

（但しp, q>0とする）

2.3　補題（([7], [8])

k^1を（p, q）トーラス結び目とする。この時

$$\mathrm{cr}(\mathrm{spun}(k^1)) = (p-1)(q-1)$$

（但しp, q>0とする）

2.4　定理の証明

補題（2.2，2.3）のpをn＋2，qをn＋1とする。(但し、nは、正の整数）この時

$$\begin{aligned} &\mathrm{cr}(k^1) - \mathrm{cr}(\mathrm{spun}(k^1)) \\ &= (n+2) \cdot n - (n+1) \cdot n \\ &= n \end{aligned}$$

（証了）

つまり、定理（2.1）のk^1としては（n＋2, n＋1）トーラス結び目をとればいいことになる。

同様、次の興味深い系も導かれる。

2.5　系

cr (k^1_1) ＞ cr (k^1_2) だが

cr (spun (k^1_1)) ＜ cr (spun (k^1_2)) となる一次元結び目の対k^1_1, k^1_2は、任意有限組存在する。

(証明) nを4以上の偶数とする。
k^1_1を（2n, n＋1）トーラス結び目であるとする。このとき補題（2.2）より

$$\mathrm{cr}(k^1_1) = 2n(n+1-1) = 2n^2.$$

一方、k^1_2を (2n²－1, 2) トーラス結び目とする。このと

き補題（２.２）より

$cr(k_2^1) = (2n^2-1) \cdot (2-1) = 2n^2-1.$

よって

$cr(k_1^1) > cr(k_2^1).$

ところが、補題（２.３）より

$cr(spun(k_1^1)) = (2n^2-1) \cdot (n+1-1) = 2n^2-n,$

$cr(spun(k_2^1)) = (2n^2-1-1) \cdot (2-1) = 2n^2-2.$

従って

$cr(spun(k_1^1)) < cr(spun(k_1^2)).$

(証了)

参考文献

[1] Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, J. Knot Theory Ramifications 10 (2001), 999-1003.

[2] 安田智之、２次元リボン結び目の最小交差数とベース数、「結び目の不変量と幾何構造」研究集会報告集 (2001), 98-106.

[3] Marumoto, Y., Stably equivalence of ribbon presentations, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), 241-251.

[4] Andrews, J.J.; Curtis, M.L., Knotted 2-spheres in the 4-sphere, Ann. of Math. 70 (1959), 565-571.

[5] Kanenobu, T.; Marumoto, Y., Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots, Osaka J. Math.34 (1997), 525-540.

[6] Suzuki, S., Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4 (1976), 241-371.

[7] Yasuda, T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, preprint.

[8] 安田智之、二次元リボン結び目の最小交差数の評価、研究集会「結び目のトポロジーⅢ」報告集 (2001), 34-47.

[9] Murasugi, K., On the braid index of alternating links, Trans. Amer. Math. Soc. 326 (1991), 237-260.