

二次元リボン結び目のもろて型 III

安田 智之

Amphicheirality of ribbon 2-knots III

Tomoyuki YASUDA

二次元リボン結び目の不変量の一つに最小交差数がある ([1],[2])。これは一次元結び目の古典的不変量である最小交点数の自然な拡張となっている。一方、一次元結び目の局所問題の代表的なものとして、結び目 k' とその鏡像 $(k')^*$ とが結び目として同値であるかどうかを判定する問題がある。同値であるとき、 k' はもろて型であるという。これに関し、最小交点数が奇数である一次元交代結び目は、決してもろて型になれないという事実が知られている ([3],[4])。また一般の一次元結び目に対してこの定理が成立するかという問題は長らく未解決であったが、Thistlethwaite によって 15 交点のもろて型結び目が発見された ([5])。更に二次元リボン結び目への拡張問題、即ち、最小交差数が奇数であるような (+) もろて型二次元リボン結び目が存在するか、という問題は [6] で考察され、最小交差数が 3 の (+) もろて型二次元リボン結び目が発見された。

本論文では、最小交差数が 5 以上の奇数である (+) もろて型二次元リボン結び目についての一考察を行う。

0. 緒 論

二次元リボン結び目の対称性については、四次元ユークリッド空間において、ある三次元ユークリッド空間について対称な位置におけること、そして (-) もろて型であること、従って二次元リボン結び目に関しては可逆的であることと (+) もろて型であることが同義であることが知られている ([7])。 (+) もろて型に関しては、 (+) もろて型でない、即ち可逆でない二次元リボン結び目は任意有限個存在する ([7])。ところで、任意の一次元結び目は Artin の構成法により、そのスパン結び目が構成される。スパン結び目は二次元リボン結び目であるが、すべて (+) もろて型である ([7],[8])。

一方、一次元結び目の対称性について、タイトの予想と呼ばれる一連の予想があり、第一予想と第二予想については解決された ([3, p.200],[4])。その系として最小交点数が奇数である一次元交代結び目は決してもろて型になれない、という事実がある。これが一般の一次元結び目について成立するかどうかは長らく未解決であったが、Thistlethwaite は 15 交点のもろて型結び目を発見した ([5])。また、一次元結び目の最小交点数の二次元リボン結び目への拡張概念である最小交差数に関して、同じ問題を考察した場合、最小交差数が奇数である (+) もろて型二次元リボン結び目が存在する。これは [6] におい

て考察され、最小交差数が 3 であるような (+) もろて型二次元リボン結び目の存在することが示された。

本論文では更に、最小交差数が 5 以上の奇数であるような、 (+) もろて型二次元リボン結び目が存在するかどうかという問題についての考察を行う。

1. 準 備

1.1 定義

$\{D_{\mu}^i \mid \mu = 1, 2, \dots, m\}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 R^4 内の三次元球体の族とする。また

$\partial D_{\mu}^i = D_{\mu}^i$ とおく。一方、 $f_{i,j}^r: D^2 \times I \rightarrow R^4$ ($r = 1, 2, \dots, m-1; i, j_r = 1, 2, \dots, m$) を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質 (1), (2) を満たすものとする。但し D^2 は二次元球体、 $I = [0, 1]$ である。

- (1) $f_{i,j}^r(D^2 \times I) \cap O_{\mu}^i = \begin{cases} f_{i,j}^r(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f_{i,j}^r(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$
- (2) $\bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i,j}^r(D^2 \times I) \cup (\bigcup_{\mu=1}^m O_{\mu}^i)$ は連結。

ここで K^2 を二次元球面

$$\left(\bigcup_{\mu=1}^m O_{\mu}^i\right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i,j}^r(D^2 \times I) - \overset{\circ}{T}\right)$$

とする。但し $T = \bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i,j}^r(\partial D^2 \times I)$ であり $\overset{\circ}{T}$ は T の内部を表す。この時、 K^2 のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

1. 2 定義

$O = \bigcup_{\mu=1}^m D_{\mu}^2$, $B = \bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i_d}^r(D^2 \times I)$ とおくとき (O, B) のことを二次元リボン結び目 K^2 に対する m ベースリボン表示 (或いは単にリボン表示) と呼ぶ。また O をベース、 B をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目 K^2 に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを K^2 のベース指数と呼び $b(K^2)$ で表す。このとき K^2 は $b(K^2)$ ベース二次元リボン結び目であるという。

1. 3 定義

$l_r = f_{i_d}^r(\{0\} \times I)$ ($r = 1, 2, \dots, m-1$) とおく。但し、 $\{0\}$ は D^2 の中心点である。ここで各 l_r が O に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 l_r の方向に従って $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs_r}$ とし (O, B) のリボン交差と呼ぶ。但し各 l_r の方向は $O_{i_r}^2$ から $O_{j_r}^2$ へ向かう方向とする。この時 $n = \sum_{r=1}^{m-1} s_r$ をリボン表示 (O, B) のリボン交差数と呼び、 (O, B) は n 交差リボン表示であるという。そうして K^2 に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことを K^2 の最小交差数 (或いは単に交差数) と呼び $cr(K^2)$ で表す。

1. 4 定義

$a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs_r}$ に対応して、 s_r 個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は l_r が D_{μ}^2 に点 a_{rv} ($v = 1, 2, \dots, s_r$) で正の側から交わるとき、 w_r の v 番目の文字を x_{μ} 、負の側から交わるときは同様 x_{μ}^{-1} とするものとする。つくられた語 w_1, w_2, \dots, w_{m-1} を利用して K^2 の結び目群 $\pi(R^4 - K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

$$(1.5) \quad [x_{\mu}; \mu = 1, 2, \dots, m \mid x_i, w_r, x_j^{-1}, w_r^{-1}; \\ owowowowowowowowowowr = 1, 2, \dots, m-1]$$

但し各 x_{μ} は O_{μ}^2 のメリディアン生成元とする ([10])。以上の様な構成法でリボン表示 (O, B) から得られた群表示 (1.5) のことを (O, B) に関連したりボン群表示と呼ぶ。また各 w_r のことをこのリボン表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示 (1.5) からは、逆の手順でリボン表示 (O, B) を定められるので (O, B) のことをリボン群表示 (1.5) に関連したりボン表示と呼ぶ。

1. 6 定義

R_{\pm}^3 を R^4 内において $x_4 = 0, x_3 \geq 0$ によって定義される R^3 の上半空間とし、 R_{\mp}^3 を R^4 内において $x_4 = 0, x_3 \leq 0$ によって定義される R^3 の下半空間とする。ここで R_{\pm}^3 を方程式 $x_1' = x_1, x_2' = x_2, x_3' = x_3 \cos \theta - x_4 \sin \theta, x_4' = x_3 \cos \theta + x_4 \sin \theta$ に従って回転させる。この時 R^2 を $x_3 = x_4 = 0$ と定めれば R_{\pm}^3 は R^2 について回転することになる。

今、 R^3 内の一次元結び目 k^1 を $k^1 \cap R_{\pm}^3$ がプロパーに埋め込まれた自明な弧であるように置いておく。この時、 $k^1 \cap R_{\pm}^3$ を上述の回転の方程式に従って回転させた時に構成される二次元結び目を k^1 のスパン結び目と呼び、 $spun(k^1)$ で表す ([7], [11], [12])。

1. 7 定義

二次元リボン結び目 K^2 に対しその鏡像を $(K^2)^*$ とし、結び目に入れられた方向を逆転したものを $-K^2$ とするとき $K^2 \sim (K^2)^*$ ならば K^2 は (+) もろて型であるといい、 $K^2 \sim -(K^2)^*$ ならば (-) もろて型であるという。また $K^2 \sim -K^2$ ならば可逆的であるという。

1. 8 定義

リボン表示 (O, B) に関連したりボン群表示を G とする。ベースの各成分に対応する G の生成元 x_1, x_2, \dots, x_m の名前の適当な入換えや、バンド各成分の方向逆転を適当に行ってそれに対応するリボン群表示 G' をつくる。その上で G' の語を構成する文字 x_i を一斉に x_i^{-1} にするという操作でリボン群表示 G'' をつくる。

以上の構成で新たにつくられるリボン群表示 G'' を G と同一にできるとき、 G は (+) もろて型リボン群表示であるという。また、(+)もろて型リボン群表示に関連したりボン表示のことを (+) もろて型リボン表示という。

2. ツイスト結び目のスパン結び目

最小交差数が5以上の奇数である (+) もろて型二次元リボン結び目の有力候補としては、ツイスト結び目と呼ばれる結び目から定義 (1.6) の方法で構成したスパン結び目があげられる。その理由を以下で述べる。

(+) もろて型の定義 (1.7) と (+) もろて型リボン群表示の定義 (1.8) により次のことはすぐ分かる。

2. 1 補題 ([6])

(+) もろて型リボン群表示に関連したりボン表示をもつ二次元リボン結び目は (+) もろて型である。

[6]においては、この補題と[13]におけるリボン表示の安定同値変形を利用して、 3_5 二次元リボン結び目 ([1]) が、リボン交差数4の (+) もろて型リボン表示をもつことを示した。一方、そのリボン表示は 4_1 結び目の正則表示として Schubert の標準形 ([15, p.36]) をとり定義 (1.6) の方法で自然に構成される $spun(4_1)$ のリボン表示と一致していることも指摘された。従って、[6]におけ

る定理とその二つの系 ([6, 2.4], [6, 2.5]) をまとめて言い換えると次のようになる。

2. 2 定理 ([6])

$spun(4_1)$ は最小交差数3の (+) もろて型二次元リボン結び目である。

ところで、 4_1 結び目を含め、一般に $(2n)_1$ 結び目はツイスト結び目と呼ばれる結び目のクラスに属する。これら最小交点数が偶数のツイスト結び目は交代結び目であるから [16, Corollary (3. 3)] により $spun((2n)_1)$ の最小交差数は $2n - 1$ 以下であることが分る。加えて、緒論で述べたようにスパン結び目は (+) もろて型であるので次の命題が成立する。

2. 3 命題

$spun((2n)_1)$ は最小交差数が $2n - 1$ 以下である (+) もろて型二次元リボン結び目である。

そして、最小交点数が m の交代結び目について、そのスパン結び目の最小交差数が $m - 2$ 以下である例はまだみつかっておらず、 $spun((2n)_1)$ は最小交差数が $2n - 1$ である可能性は高い。

従って次のことが予想される。

2. 4 予想

最小交差数が奇数である (+) もろて型二次元リボン結び目は任意有限個存在する。

3. アレキサンダー多項式の可能性

二次元リボン結び目の重要な不変量であるアレキサンダー多項式は、[16]では最小交差数の評価に重要な役割を演じている。従って、この不変量を用いてツイスト結び目のスパン結び目の最小交差数を評価してみたい。

まず、 $spun(6_1)$ は命題 (2. 3) より最小交差数が5以下である (+) もろて型二次元リボン結び目である。最小交差数が5であることを示すには、最小交差数が4以下の二次元リボン結び目の中に、 $spun(6_1)$ と同じアレキサンダー多項式 $2 - 5t + 2t^2$ をもつ (+) もろて型二次元リボン結び目が存在しないことを示せばよい。ところが、次の命題が成立する。

3. 1 命題

最小交差数が4以下で、アレキサンダー多項式が $2 - 5t + 2t^2 \pmod{\pm t^n}$ であるような (+) もろて型二次元リボン結び目が存在する。

(証明) 次のリボン群表示

$$[x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_2^1 x_1 x_2^1 x_1^1 x_2, \\ x_1 x_3 x_1^1 x_3^1 x_1 x_3^1]$$

は、(+) もろて型リボン群表示であるので、補題 (2. 1) により、これに関連したリボン表示をもつ二次元リボン結び目は (+) もろて型であり、かつリボン交差数4ある。また、このリボン群表示に [17] のアレキサンダー多項式の計算法を適用すると $(2 - t)(1 - 2t)$ が容易にでる。(証了)

同様に、(+) もろて型二次元リボン結び目 $spun(8_1)$ の最小交差数が7であることを示すには、最小交差数が6以下の二次元リボン結び目の中に、 $spun(8_1)$ と同じアレキサンダー多項式 $3 - 7t + 3t^2$ をもつ (+) もろて型二次元リボン結び目が存在しないことを示せばよい。ところが、次の命題が成立する。

3. 2 命題

最小交差数が6以下で、アレキサンダー多項式が $3 - 7t + 3t^2 \pmod{\pm t^n}$ であるような (+) もろて型二次元リボン結び目が存在する。

(証明) 次のリボン群表示

$$G = [x_1, x_2 \mid x_1 w_2 x_2^1 w_2^1]$$

(但し、 $w_2 = x_2^1 x_1 x_2 x_1^1 x_2 x_1^1 x_2^1 x_1 x_2 x_1^1$)

は、(+) もろて型リボン群表示であるので、補題 (2.1) により、これに関連したリボン表示をもつ二次元リボン結び目は (+) もろて型である。また、このリボン群表示に [17] のアレキサンダー多項式の計算法を適用すると容易に $3 - 7t + 3t^2$ がでる。一方、このリボン群表示に関連したリボン表示は [13] の安定同値変形を4回施すことにより、リボン交差数6のリボン表示へと変形される。それを、対応するリボン群表示の同型変形で以下に示す。

$$G \cong [x_1, x_2, x_3 \mid x_1 w_2 x_2^1 w_2^1, x_2 x_1^1 x_2 x_3^1 x_2^1 x_1] \\ \cong [x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_4 x_1^1 x_2^1 x_1, \\ x_1 x_3 x_1^1 x_2^1 x_1 x_3 x_1^1 x_3^1 x_1^1 x_2 x_1 x_3^1, \\ x_2 x_1^1 x_2 x_3^1 x_2^1 x_1] \\ \cong [x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 x_3 x_1^1 x_3 x_2^1 x_3^1 x_4 x_3^1, \\ x_4 x_1^1 x_2^1 x_1, \\ x_2 x_1^1 x_2 x_3^1 x_2^1 x_1] \quad (\text{証了})$$

4. 結 語

予想 (2.4) の肯定的解決に対し、ツイスト結び目のスパン結び目の最小交差数を決定するという方法を考えたが、以上で述べた通り、その決定には、アレキサンダー多項式は力不足であった。しかしながら他のクラス、特にアレキサンダー多項式の次数の高い結び目のクラスに関して力を発揮する可能性はまだ残されている。

参考文献

- [1] Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), 999-1003.
- [2] 安田智之、二次元リボン結び目の最小交差数とベース数、「結び目の不変量と幾何構造」研究集会報告集 (2000), 98 - 106.
- [3] 村杉邦男、結び目理論とその応用 (1993)、日本評論社.
- [4] Murasugi, K., On invariants of graphs with applications to knot theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* 314 (1989), 1-49.
- [5] C. C. アダムス (金信泰造訳)、結び目の数学 (1998)、培風館.
- [6] 安田智之、二次元リボン結び目のもろて型 II、奈良工業高等専門学校研究紀要第38号 (2003)、97-99.
- [7] Suzuki, S., Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 4 (1976), 241-371.
- [8] Satoh, S., Virtual knot presentation of ribbon torus-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2000), 531-542.
- [9] 安田智之、スパン結び目のリボン表現ともろて型、奈良工業高等専門学校研究紀要第36号 (2001), 117-121.
- [10] Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R^4 , *Osaka J. Math.* 6 (1969), 435-446.
- [11] Andrews, J.J.; Curtis, M. L., Knotted 2-spheres in the 4-sphere, *Ann. of Math.* 70 (1959), 565-571.
- [12] Kanenobu, T.; Marumoto, Y., Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots, *Osaka J. Math.* 34 (1997), 525-540.
- [13] Marumoto, Y., Stably equivalence of ribbon presentations, *J. Knot Theory Ramifications* 1 (1992), 241-251.
- [14] Rolfsen, D., *Knots and links*, Math. Lecture Series 7, Publish and Perish Inc., Berkley, 1976.
- [15] 河内明夫編、結び目理論 (1990)、シュプリンガーフェアラーク東京.
- [16] Yasuda, T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 15 (2006), 1-9.
- [17] Yasuda, T., A presentation and the genus for ribbon n -knots, *Kobe J. Math* 6 (1989), 71-88.