

# M系列を用いた線形システムの周波数特性測定に関する調査

近藤 勝也

A survey of Maximum-Length Sequences for measuring frequency characteristics of linear systems

Katsuya KONDO

An impulse response is used for measuring frequency characteristics of acoustic systems or control systems. Energy of a pure impulse is so small that a signal-to-noise ratio of the response is low. To solve such problem, maximum-length sequences (MLS) has been used since at least three decades. However, there are few literatures that are useful for graduation research in colleges of technology. In this paper, I surveyed references on measurement of frequency characteristics by using the MLS and summarized actual measuring method with a calculated sample of the MLS.

## 1. はじめに

音響システムや制御システムの研究分野において、対象システムの周波数特性を測定することが、しばしば重要な検討項目の一つになる。周波数特性は、伝達関数の表現方法の一つで、正弦波入力に対するシステムの応答を周波数の関数として表したもので、特性が直観的にわかりやすいという特徴がある。実際の測定では、インパルスを入力した時のシステムの出力であるインパルス応答を周波数解析する方法が、周波数特性を求めるために最もよく使われる考え方である。しかし、純粋なインパルスはエネルギーが小さいため、信号雑音比(SNR)が悪いという欠点があった。

これを改善するため、入力信号のエネルギーを大きくする方法がいろいろ研究<sup>1)</sup>されてきた。これらの改善方法は、入力信号として継続時間の長い信号を用いることと、入力信号と応答信号の相関を取ることによってSNRを飛躍的に向上させた。これは一般的にはクロススペクトル法と呼ばれ、入力信号に広帯域ノイズを使用して、自己相関関数と相互相関関数の計算を周波数軸上で処理する。この中で、特に入力信号を工夫した方法としてM系列法とTSP法がある。前者はM系列(Maximum length sequences)と呼ばれる白色性の疑似ランダムノイズを、後者はインパルスを時間軸上で引き延ばしたTSP(Time stretched pulse: 時間引き延ばしパルス)を用いること

により、入力信号のエネルギーを増大させた。これら2つの方法はいずれも、線形システムの周波数特性測定方法として効果の大きい方法である。

しかし、これらに関する参考文献は原理などを述べたものが多く、高等専門学校卒業研究で使用するためには、より具体的な使用方法などを記述した参考書が望まれる。そこで、前報<sup>2)</sup>ではTSP法について調査したので、今回はM系列法について調査した。また、前報と同様に計算例は数式処理ソフトMathcadを用いて計算し、そのプログラムを付録に載せた。

## 2. インパルス応答測定とM系列

ここで対象とするのは図1に示す線形なシステムである。中央の四角が周波数特性の測定対象で、 $g(t)$ はそのインパルス応答である。 $u(t)$ は測定のための入力信号で、 $n(t)$ は測定途中に外乱として加わるノイズ信号、 $y(t)$ は測定される出力信号である。M系列を用いた測定では、

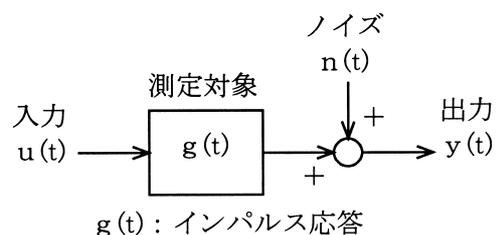


図1 線形システムにおける入出力の構成

$u(t)$ にM系列信号を用い、出力信号と入力信号との間の演算をすることにより  $g(t)$ を推定する<sup>3)</sup>。以下にはM系列信号とその作り方を説明する。

### 2.1 M系列

M系列は人工的な不規則信号で、0と1の2つの状態をランダムに発生させ、その系列は  $L = 2^n - 1$  ( $n$ は整数でM系列の次数という)の周期を持ち、有限の周期  $L$ 内は白色性の特性を持つ、すなわち自己相関関数がインパルス関数になるように作られた系列である<sup>4),5)</sup>。また、M系列は疑似雑音(PN: Pseudo Noise)の中でもっとも基本的な系列の一つである。

M系列  $a_i$ の例を、4次( $n=4, L=15$ )の場合について図2に示し、これを見ながらM系列の一般的な特性<sup>5),6)</sup>の主なものを次に説明する。

- ① 1周期  $2^n - 1$  の中に0の数は  $2^{n-1} - 1$  個、1の数は  $2^{n-1}$  個ある。すなわち  $n$ のいかんに関わらず0の数は1の数より常に1個少ない。これを全体から見ると、0と1の数はほぼ等しいと考えてよい。
- ② 周期  $2^n - 1$  のM系列の任意の場所において、連続した  $n$  個の要素(長さ  $n$  の連という)  $a_i \sim a_{i+n-1}$  に注目して、そのビットパターンを見ると、すべてが0である場合(図では0000)を除くすべてのパターン(0001,1111など)が1周期内に1回だけ現れる。
- ③ 同様に長さ  $m$  ( $m < n$ ) の連  $a_i \sim a_{i+m-1}$  のビットパターンを見ると、すべてのパターンが1周期内に同じ回数だけ現れる。その出現回数は長さ1の連では  $2^{n-1}$  回有り、連の長さが1増す毎に回数が半減していく。ただしどの連においても、すべてが0であるパターンのみは他のパターンに比べて1回だけ少なく現れる。
- ④ M系列  $a_i$  を  $k$  だけシフトした系列  $a_{i+k}$  を作り、それらの和の系列  $a_i + a_{i+k}$  を作ると、それらは元の系列を  $j$  だけシフトしたものになる。 $j$  は一意的に決まる。これはシフト加法と呼ばれ次のようになる。

$$a_{i+j} = a_i + a_{i+k} \pmod{2 \cdots 2 \text{で除した余り}}$$

- ⑤  $a_i$  の0を+1, 1を-1に対応させた系列  $m_i$  を考えると、 $m_i$  の自己相関関数  $\phi$  は次式になる。但し  $L = 2^n - 1$ 。

$$\phi_k = \frac{1}{L} \sum_{L-1} m_i m_{i+k} = \begin{cases} 1 & \text{for } k = 0, L, 2L \cdots \\ -1/L & \text{for } k \neq 0, L, 2L \cdots \end{cases} \quad (1)$$

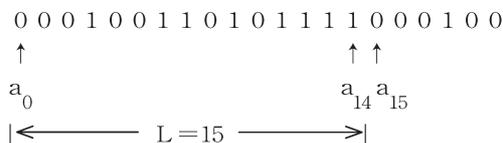


図2 周期15(4次)のM系列の一例

これはインパルスと同様の性質であり、この性質が後で述べるインパルス応答の測定に利用される。

### 2.2 M系列の発生

M系列は先に説明した呼び名の他に、shift register sequece, linear recurring sequence などとも言われる。これらが示すように、M系列  $a_i$  はシフトレジスタを用いた図3の回路によって簡単に発生することができる。図中の  $D_0 \sim D_{n-1}$  は  $n$  段のシフトレジスタを構成し計算が1回進む毎に、入力を取り込み記憶して出力する。係数  $f_i$  は0または1の値を取り、各段のレジスタの出力に  $f_i$  を掛けて、exclusive OR回路を通して左端のシフトレジスタ  $D_{n-1}$  にフィードバックする。計算の初期値は任意の値でよい。ただし、すべての  $a_i$  が0になるとそれ以上状態が変化しないので初期値から除外する。つまり  $n$  次M系列では0が  $n$  個続くビットパターンが存在しない。

図3の回路の計算を続けると系列  $a_i$  は一定の周期で同じ値を繰り返すようになる。この周期は係数  $f_i$  の取り方によって長くなったり短くなったりするが、 $n$  段のシフトレジスタを用いて発生することができる系列の最大周期  $L$  は決まっており、先に述べた  $L = 2^n - 1$  である。つまり、 $2^n$  の中で0が  $n$  回続くパターンのみは発生しないので-1される。この最大周期列を発生させる  $f_i$  の組合せはいろいろ研究されて既知である<sup>5)</sup>。

図3の回路を式で表す。  $a_i, f_i$  はともに0と1の2値だけなので、exclusive ORの部分 は加算とその結果の  $\text{mod} 2$  で表現される。乗算の部分は通常の計算でよいから、図の回路は次の(2)式で表される。

$$a_{i+n} = \sum_{j=0}^{n-1} f_j a_{i+j} \quad (2)$$

(2)式の右辺の形式に合わせると、左辺の  $a_{i+n}$  の係数は  $f_n$  がかつ  $f_n = 1$  (図3の左端参照)と解釈できるので、次のように展開できる。

$$f_n a_{i+n} + f_n a_{i+n} = \sum_{j=0}^n f_j a_{i+j}$$

この左辺は  $\text{mod} 2$  を計算すると0になるので、結局(2)式は(3)式のようになる。

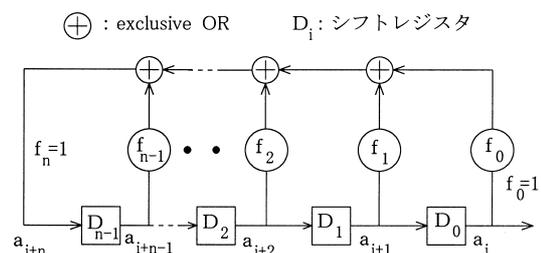


図3 M系列発生回路

$$\sum_{j=0}^n f_j a_{i+j} = 0 \quad (3)$$

(3)式はn段のシフトレジスタをもちいたn次のM系列の式で、係数 $f_j$ の数はn+1個あるが、係数 $f_n$ は上記したように既に1に決まっているので、残りのn個を最大周期列が発生するように決めることになる。このn次の最大周期列が発生するための $f_j$ の値は文献<sup>5)</sup>で詳しく説明されている。それによると、通常は $f_n$ に加えて $f_0$ も1に設定される。

次に、 $f_j=0$ だと図3の $f_j$ のフィードバック回路が不要になるので、1となる $f_j$ の数は少ない方が演算が簡単になる。同じ文献によれば、次数nに関わらずM系列を実現するためには、1となる $f_j$ の数は前記 $f_0$ と $f_n$ を含んで最低3個必要である。しかし、この場合は発生したM系列に乱数としての課題が残るので、次に少ない条件である5個の場合がよく使われている。この5個の場合について、M系列を実現するために必要な $f_j$ のjの番号を文献から引用して表1に示した。5個の $f_j$ のうち、 $f_0$ と $f_n$ は常に1だから、残り3個の1になるjの番号の代表値をn=24までについて表中に示した。

表1 値が1になるM系列発生式の係数 $f_j$ の組合せ

n*1	f <sub>j</sub> =1になる係数番号jの組合せ*2		
4	(1)	(3)	
5	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(2, 3, 4)
6	(1, 2, 5)	(1, 3, 4)	(2, 3, 5)
7	(1, 2, 3)	(1, 3, 5)	(2, 3, 4)
8	(1, 2, 7)	(1, 3, 5)	(2, 3, 5)
9	(1, 2, 7)	(1, 4, 8)	(3, 4, 6)
10	(1, 2, 5)	(1, 3, 4)	(2, 3, 8)
11	(1, 2, 4)	(2, 3, 7)	(2, 5, 8)
12	(1, 2, 8)		
13	(2, 8, 12)		
14	(1, 2, 12)		
15	(1, 3, 12)	(2, 8, 12)	(3, 4, 12)
16	(1, 4, 6)		
17	(1, 2, 3)	(1, 8, 12)	(2, 4, 6)
18	(1, 8, 16)	(5, 7, 10)	
19	(1, 2, 5)		
20	(1, 8, 12)	(3, 4, 19)	(3, 5, 9)
21	(2, 5, 13)	(2, 7, 14)	(3, 8, 12)
22	(1, 2, 11)	(1, 5, 9)	
23	(1, 4, 5)	(3, 8, 12)	(4, 5, 12)
24	(1, 2, 7)		

\*1 nはM系列の次数

\*2 n=4を除きM系列発生式の項数は5.

例えば、n=6の(1, 2, 5)は、 $f_1=f_2=f_5=1$ を示し、また常に $f_0=f_n=1$ だから、合計1となる $f_j$ は5つある。この( )内の数値は図5のp1, p2, p3の値。

### 3. M系列を用いた測定

#### 3.1 インパルス応答の計算

(1)相関関数を用いた方法

図1の関係において、出力 $y(t)$ は次の畳み込み積分で表される<sup>7)</sup>。なお、ここでは時間あるいは系列番号などの変数を添字でなく( )内に書いている。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau + n(t) \quad (4)$$

雑音 $n(t)$ が入力に無相関であれば、(4)式の関係は相関を取ることでより次のようになる。

$$\phi_{uy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \phi_{uu}(t-\tau)d\tau \quad (5)$$

ただし、 $\phi_{uy}(t)$ 、 $\phi_{uu}(t)$ は次の式で定義される。

$$\phi_{uu}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(\eta)u(\eta+t)d\eta$$

$$\phi_{uy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(\eta)y(\eta+t)d\eta$$

次に計算機処理のために(5)式を離散形で表現する。データを $\Delta t$ 秒さきざみでサンプリングする場合を考え、サンプリング番号をiで表す。すなわち、データは時刻 $t=0, \Delta t, 2\Delta t \dots i\Delta t$ の値である。更に $\phi_{uu}(-i)=\phi_{uu}(i)$ の関係を用いると、(5)式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \phi_{uy}(0) \\ \phi_{uy}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{uy}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{uu}(0) & \phi_{uu}(1) & \dots & \phi_{uu}(i) \\ \phi_{uu}(1) & \phi_{uu}(0) & \dots & \phi_{uu}(i-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \phi_{uu}(i) & \phi_{uu}(i-1) & \dots & \phi_{uu}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ g(i) \end{pmatrix} \quad (6)$$

(6)式において、 $\phi_{uu}(i)$ 、 $\phi_{uy}(i)$ はそれぞれ入出力データの相互相関、入力データの自己相関として求められる。このデータを用いて(6)式の連立一次方程式を解く事により、未知数 $g(i)$ すなわちインパルス応答を求めることができる。この計算の中で、右辺第1項の逆行列の計算がやっかいであるが、入力信号にM系列を用いると、逆行列が比較的簡単に求まることが示されている<sup>5)</sup>。

(2)畳み込み積分を用いた方法

M系列の性質をうまく利用することにより、入力データと出力データの畳み込み積分によってインパルス応答を求める方法が実用化されている。その方法を文献<sup>3)</sup>に従って説明する。

M系列の0を+A, 1を-Aに置き換えた信号をM系列信号といい $m(i)$ で表す。(1)式の $m_i$ と同じであるが,ここでは $i$ を離散時間番号とする離散データとして扱う.このM系列信号 $m(i)$ とその時間を反転した信号 $m(-i)$ の巡回畳み込みを行った結果を $\psi(i)$ とすると, $\psi(i)$ は次式の性質を持つことが(1)式から言える.

$$\psi(i) = \frac{1}{(L+1)A^2} \sum_{j=0}^{L-1} m(j)m(j-i) = \begin{cases} L/(L+1) & \text{for } i=0 \\ -1/(L+1) & \text{for } i \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

ただし, $L=2^n-1$ で, $(L+1)A^2$ は正規化定数である.また,右辺に含まれる時間項 $(j-i)$ はmodulo Lの演算を行って,その値を0とL-1の間の範囲とする.この結果は先にも述べた単位インパルス信号になっている.

インパルス応答の測定は周期LのM系列信号 $m(i)$ を2周期発生させて入力データ $u(i)$ とする.このとき出力信号は第2周期目に相当する時間区間(これを $0 \leq i \leq L-1$ とする)を切り出して出力データ $y(i)$ とする.インパルス応答 $g(i)$ (正しくはその測定結果)は,次式のように $y(i)$ と時間軸を反転したM系列信号 $m(-i)$ との巡回畳み込み(データを周期Lで繰り返す畳み込み)を計算することで求められる.

$$g(i) = \frac{1}{(L+1)A^2} \sum_{j=0}^{L-1} y(j)m(j-i) \quad (8)$$

### 3.2 測定手順

M系列を用いた周波数特性の測定手順を図4に示した.図に従って以下に説明する.

測定条件で始めに決めるのは,A/D,D/A変換のサンプリング周波数 $f_s$ と入力信号の時間長さ $T$ であるが,これらは先の文献2)と同様にして決めればよい. $f_s$ と $T$ が決まると全データ数 $N(=f_s T)$ が決まり,M系列の長さ $L(=2^n-1)$ は $L > N$ なる条件が必要であるから,これを満たす最小の $n$ を選ぶと,M系列の次数 $n$ が決まる.これらの条件の下で,M系列 $a(i)$ を先に述べた方法で計算する.

M系列信号化では,M系列の0を+A,1を-Aに置き換えたM系列信号 $m(i)$ を作成する.Aの値は測定対象に加える物理的な信号の大きさに相当するが,ここでは $A=1$ としておき,実際の信号の大きさ(振幅)はアナログ信号に変換する時に決めればよい.

入力信号作成では周期LのM系列信号を2周期分つなぎ合わせて入力信号 $u(i)$ とし,それをD/A変換して測定対象に入力する.

測定対象の出力信号 $y(t)$ は2周期(2L)分のデータがあ

るので,A/D変換の後に後半の1周期分を切り出して出力データ $y(i)$ とする.これは巡回畳み込みの前提である,周期Lの入力信号が繰り返し加えられているという条件に合わせるためである.また, $y(i)$ は直流成分を除去するため,あらかじめ $y(i)$ の1周期の平均値(=直流成分)を計算してその分を各データから引き算しておく.

畳み込み積分では出力データ $y(i)$ とM系列信号 $m(i)$ を用いて(8)式の計算を行う.その結果がインパルス応答 $g(i)$ である.なお,通常のはほとんどインパルス応答では振幅の絶対値は余り必要でないので,(8)式右辺の正規化定数の内Aを無視して相対的な応答としても差し支えない.ただし,測定の段階における信号が大きすぎるための飽和や,小さすぎるためのノイズの影響などについては注意が必要である.

最後にインパルス応答 $g(i)$ を離散フーリエ変換(DFT)すると,測定対象の周波数応答 $G(k)$ が得られる. $k$ は離散周波数である.

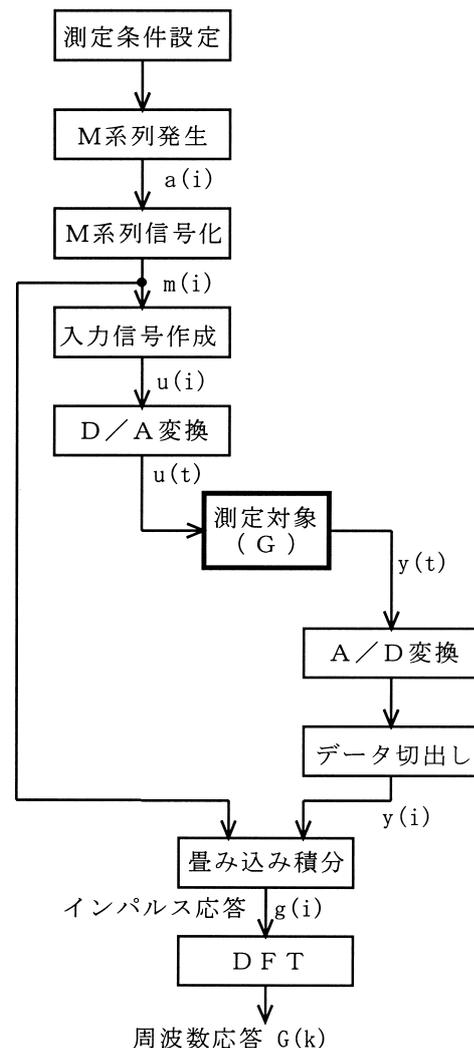


図4 M系列を用いた測定手順

### 3.3 M系列の計算例

表1に従ってM系列を発生するため、図3の回路図を簡略化した演算回路が図5である。すなわち、表1が示すように、図3において係数 $f_j$ が1になる $j$ の値は0および $p_1, p_2, p_3$ のみなので、図5はこれらのフィードバックループのみで構成されている。

この演算回路を数式処理ソフトMathcadで計算するためのプログラム例を付録に載せた。プログラムで示したM系列の計算例は、 $n=5, p_1=1, p_2=2, p_3=3$ 、初期値01010の条件である。さらに $0 \rightarrow +1, 1 \rightarrow -1$ に置き換えたM系列信号の自己相関関数を計算して表示した。

プログラムの詳細はコメント欄に説明した。

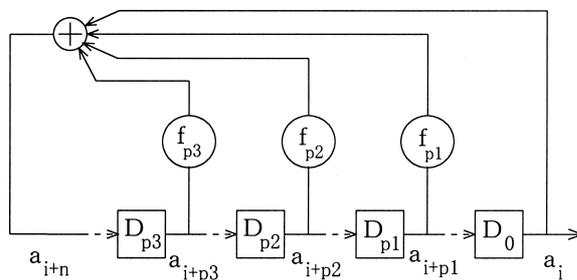


図5 M系列発生の演算回路

## 4. あとがき

M系列は古くから研究され、通信や計測・制御の分野で広く用いられており、遅延時間測定、乱数発生、線形システムの同定などに応用されてきた。また、最近ではスペクトル拡散通信で重要な技術要素となっている。このM系列の応用を高専の卒業研究課題に取り入れようとした場合に、M系列の具体的な計算方法やインパルス応答の計算手順について分かりやすく書かれた文献が見あたらなかった。そこで、この点を念頭に置いて、文献調査と整理を行ったのがこの結果である。

今後はこのM系列を実際の測定などに応用した卒業研究を行って、その結果をまとめて行きたい。

### 参考文献

- 1) 佐藤史明, "室内音響インパルス応答の測定技術", 日本音響学会誌, 58巻, 10号, pp.669-676(2002).
- 2) 近藤勝也, "TSPを用いた線形システムの周波数特性測定に関する調査", 奈良高専研究紀要, 39号, pp.73-78(2003).
- 3) 金田豊, "M系列を用いたインパルス応答測定における誤差の実験的検討", 日本音響学会誌, 52巻, 10号, pp.152-159(1996).
- 4) 磯部孝編, "相関関数およびスペクトル—その測定と応用—", 東京大学出版会(1968), pp.170.
- 5) 柏木潤, "M系列とその応用", 昭晃堂(1996), pp.16,138,164.
- 6) 柏木潤, "M系列と正規乱数発生への応用", 情報処理, 22巻, 1号, pp.31-37(1981).
- 7) 日野幹雄, "スペクトル解析", 朝倉書房(1977), pp.122.

