TSPを用いた線形システムの周波数特性測定に関する調査

近藤　勝也

A survey of TSP for measuring frequency characteristics of linear systems

Katsuya　KONDO

An impulse response is used for measuring frequency characteristics of acoustic systems or control systems. Energy of a pure impulse is so small that a signal-to-noise ratio of the response is bad. To solve such problem, a time-stretched pulse (TSP) was proposed by Aoshima and studied more by Suzuki and Asano etal in the field of acoustic systems. In this paper, I surveyed references on measurement of frequency characteristics by using the TSP and summarized actual measuring method. Moreover, calculated samples of the TSP and its transformation are shown for applying to actual measurement.

1．はじめに

音響システムや制御システムの研究分野において，対象システムの周波数特性を測定することが，しばしば重要な検討項目の一つになる．周波数特性は，伝達関数の表現方法の一つで，正弦波入力に対するシステムの応答を周波数の関数として表したもので，特性が直観的にわかりやすいという特徴がある．実際の測定では，インパルスを入力した時のシステムの出力であるインパルス応答を周波数解析する方法が，周波数特性を求めるための最も基本的な考え方である．しかし，純粋なインパルスはエネルギーが小さいため，信号雑音比(SNR)が悪いという欠点があった．これを改善するため音響システムの分野において，インパルスを時間的に引き延ばしてエネルギーを大きくした時間引き延ばしパルス（TSP：Time-stretched pulse)が青島によって考案された[1,2]．その後鈴木，浅野らによって詳細な検討とTSPの最適化が行われ[3~8]，精度の良い測定方法が確立された．

本報告では伝達関数の周波数特性測定という面から，TSPを用いたインパルス応答の測定方法を整理し，さらには数式計算ソフトMathcadを用いた計算例を示して，実際の測定のための整理を行った．なお，本測定方法は線形なシステムを対象にしたものである．

2．周波数特性の測定

2.1　周波数特性とインパルス応答

図1にシステムの伝達関数Gと入力Hおよび出力Yの関係を示す．今後Gなどの大文字は，周波数領域もしくは複素周波数領域の関数を示す．変数と組み合わせると，ラプラス変数sを用いてG(s)，周波数fや角周波数ωを用いてG(f)やG(ω)，z変換ではG(z)，離散フーリエ変換の周波数変数kを用いてG(k)などのように表される．このように周波数領域で表現すると，図1の関係は次の式で表される．

$$Y = G \cdot H \tag{1}$$

この報告で取り上げる課題はGの周波数特性（振幅特性と位相特性）を測定によって求めることである．そのために良く用いられる基本的な考え方は，図2のように入力にインパルスを用いることである[3,9]．図中のhimpやyimpなどに使ったように，今後の小文字は時間領域の関数を示す．インパルスは全ての周波数を一様に含むから，H＝1となるので，(1)式はY＝Gとなり，図

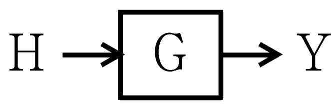

図1　システムの伝達関数と入力

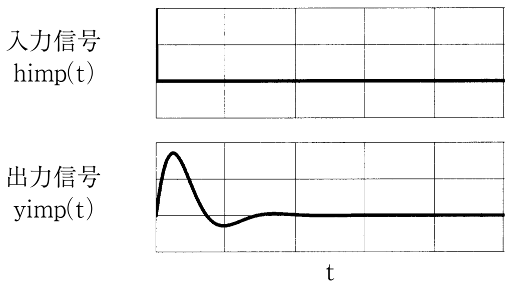

図2　インパルスを用いた測定

２で得られた出力yimp(t)を周波数解析するとGの周波数特性が得られる．しかし，インパルスは信号のエネルギーが小さいために雑音の影響を受け易く，SNRの良い測定が難しい．これを改善するためにいろいろの方法が検討されている[9]．そのうち，最近の測定でよく使われる方法は，時間引き延ばしパルスを入力信号に用いるTSP法と，M系列と呼ばれる白色性の疑似ランダムノイズを入力信号に用いるMLS(Maximum length sequence)法である．ここでは，入力信号が正弦波の（スイープ状）変調信号になって直観的に取り扱いやすく，かつノイズなどの外乱に対しても強いと言われている[9),10)] TSP法を取り上げて，実際的な取扱方法を調査した．

2.2　TSP

1) TSPの式

TSP法は入力信号に，図２のようなエネルギーの小さいインパルスでなく，エネルギーの大きい（時間的に広がった）信号を用いてSNRの改善を図る測定方法である．その考え方を以下に説明する．

まず，入力信号h(t)を与えた時の出力信号y(t)を測定し，それを周波数領域に変換すると，式(1)から直ぐに伝達関数Gが次の(2)式で表される．これが測定信号を用いて測定対象の周波数特性を求める式である．H^{-1}はh(t)を周波数領域に変換したHの逆関数で，逆フィルタと呼ばれる．

$$G = Y \cdot H^{-1} \tag{2}$$

(2)式に基づいた測定でSNRの改善を図ると言う観点から考えると，入力信号h(t)に要求される条件は次のようになる．

①入力信号h(t)のエネルギーが大きいこと．

②逆フィルタH^{-1}が簡単に計算出来ること．

このような条件を満たす入力信号として，時間引き延ばしパルス(TSP)が青島によって考案され[1),2)]，その後鈴木，浅野らによって詳細な研究が行われて測定方法が確立された[3)~8)]．なお，実際の測定では標本化(サンプリング)された離散データの計算になるので，今後時間領域，周波数領域共に離散信号で表現する．

周波数領域のTSP信号H(k)は，鈴木，浅野らによって次のように整理されている[5)~7)]．

$$H(k)=\begin{cases} \exp(j\alpha k^2) & \text{for } 0 \leqq k \leqq N/2 \\ \exp\{-j\alpha(N-k)^2\} & \text{for } N/2 < k \leqq (N-1) \end{cases} \tag{3}$$

または

$$H(k)=\begin{cases} \exp(j\alpha k^2) & \text{for } 0 \leqq k \leqq 2/N \\ H^*(N-k) & \text{for } N/2 < k \leqq (N-1) \end{cases} \tag{4}$$

いずれも　$\alpha = \dfrac{4m\pi}{N^2}$

ただし，j：虚数，k：離散周波数の変数，N：離散データ数，m：パルスの引き延ばし係数(整数)，H*：Hの共役複素数　である．

以下に(3)式または(4)式（今後合わせて(3)式と呼ぶ）で表されるH(k)の概要を文献に基づいて説明する．

2) 時間引き延ばし

図３に，図２の純粋なインパルスを離散フーリエ変換したHimp(k)の絶対値と偏角を示す．全データ数N＝256 (k＝0～N-1) である．当然，インパルスは全ての周波数成分において，大きさが等しく(すべて単位量１)，偏角が0radである．言いかえればインパルスの周波数成分は位相角0radの余弦波のみであり，時刻0ですべての周波数成分の大きさが１と言うことである．このようなインパルスに対し，(3)式で与えられるTSPの大きさは，exp関数に掛かる係数であるから，すべての周波数成分についてインパルスと同じ１である．しかし，その偏角はexpの( )内の虚数jに掛かる係数であるから，周波数の２乗に比例して位相角が進められている．なおkがN/2を越える範囲では，離散フーリエ逆変換した時の時間領域の信号が純実数となるように，H(k)に複素共役の条件を与えている．このようにTSPは，その周波数成分の大きさは変えないで位相角のみを操作することにより，時間領域におけるインパルス状の信号を引き

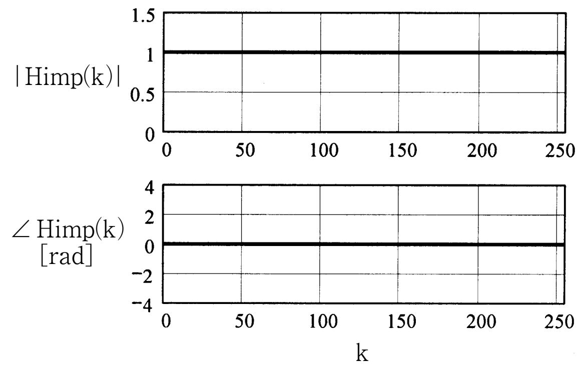

図3　インパルスの離散フーリエ変換結果

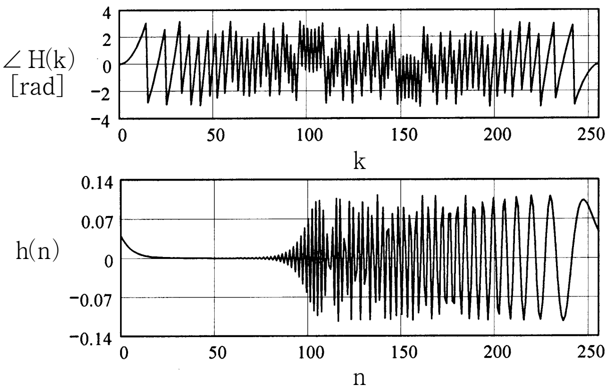

図4　TSPの計算例（上段：周波数領域，下段：時間領域）

延ばす式となっている．

図4はm＝80，N＝256として計算した(3)式のH(k)とそれを離散フーリエ逆変換したh(n)を示す．H(k)は位相角のみを示し，h(n)は実数部のみを示した．nは離散時間変数である．図のh(n)より，時間領域で時間軸方向に引き延ばされたパルスが得られ，信号のパワーはインパルスに比べ遙かに大きくなっていることが分かる．さらに，(3)式は高い周波数成分ほど，位相角の進みが大きいので，低い周波数成分に比べて時間的に早く現れる．したがって，図4では始めに高い周波数の波形が来て，後になるほど低い周波数の波形になる．なお図の左端に，一番低い周波数成分の一部が出ているのは，右端の低周波数の一部が左側に回り込んだものである．これは離散データのフーリエ変換では，時間領域，周波数領域共に，全データを一周期として同じ波形が繰り返されることに起因した現象である．実際の測定に使う場合は，図の左端と右端がつながっていると考えて，データ全体を左方向に(円状)シフトして，全データの始めと終わりが0に収束したTSP信号を作る．具体例は次章で説明する．

3)時間引き延ばし長さ

(3)式において，時間引き延ばし係数mを含むパラメータαの式は鈴木らによって提案[6)]された考え方である．αの条件により，TSPの位相角を周波数の2乗に比例させることと，H(k)がk＝N/2で実数値になることが同時に満たされる．これによって，時間領域のTSP信号の波形を滑らかに変化させる効果がある．すなわち，k＝N/2，すなわちサンプリング周波数の1/2を(3)式に入れると，H(N/2)＝exp(jmπ)となり，mが整数であるから，複素数H(N/2)は実数になる．

次にmは時間引き延ばし長さを決める．図4においてTSPの振幅が大きくてエネルギーが十分大きい区間を実効パルス幅Lとする．Lはmで決まりL＝2mの関係にあると，浅野の文献[8)]に説明されている．図4にあてはめると，m＝80であるからL＝2×80＝160となり，実効パルス幅はほぼその通りになっている．するとLはデータ長N以内でなければならないから，mが取りうる値の範囲は次のようになると同じ文献に付け加えられている．

$$0 \leqq m \leqq N/2 \tag{5}$$

4)逆フィルタ

H(k)の周波数領域の逆フィルタをF(k)とすると，F(k)は(3)式から容易に次のように導かれる．

$$F(k) = \frac{1}{H(k)} = \begin{cases} \exp(-j\alpha k^2) & \text{for } 0 \leqq k \leqq N/2 \\ \exp\{j\alpha(N-k)^2\} & \text{for } N/2 < k \leqq (N-1) \end{cases} \tag{6}$$

$$\alpha = \frac{4m\pi}{N^2}$$

(6)式は(3)式とは正反対に，位相角が周波数の2乗に比例して遅れるので，時間領域では低い周波数成分からから始まることになる．すなわち，(6)式を離散フーリエ逆変換した時間領域の信号は，図4のTSP信号の波形を時間軸で反転させた(時間が図4の右端から左に進む)波形になる．

なお，(6)式を(3)式と比較するとF(k)は次の共役複素数で表されることも容易に分かる．

$$F(k) = H^*(k) \tag{7}$$

3. TSPを用いた測定

図5にTSPを用いた周波数特性の測定フローを示す．全体の概要としては，始めに測定条件を決めて，TSPのパラメータの値を決定する．その値を用いて周波数領域のTSPであるH(k)を(3)式に基づいて計算する．それを離散フーリエ逆変換(IDFT)して，時間領域のTSPであるh(n)を得る．これを円状シフトすることにより，実際の測定に用いるhr(n)を求め，アナログ信号に変換(D/A変換)したhr(t)を測定対象Gに入力する．この入力に対するGからの出力信号y(t)をディジタル信号に変換(A/D変換)し，その結果の離散信号y(n)を離散フーリエ変換(DFT)すると，周波数領域の出力信号Y(k)が求まる．一方，測定対象Gへの入力信号の元になったhr(n)を離散フーリエ変換してHr(k)を求め，その逆数を取ることにより周波数領域の逆フィルタFr(k)を計算する．このFr(k)と先のY(k)のかけ算が周波数領域の畳み込み演算で，その結果が測定対象Gの周波数特性G(k)であり，それを離散フーリエ逆変換したのがGのインパルス

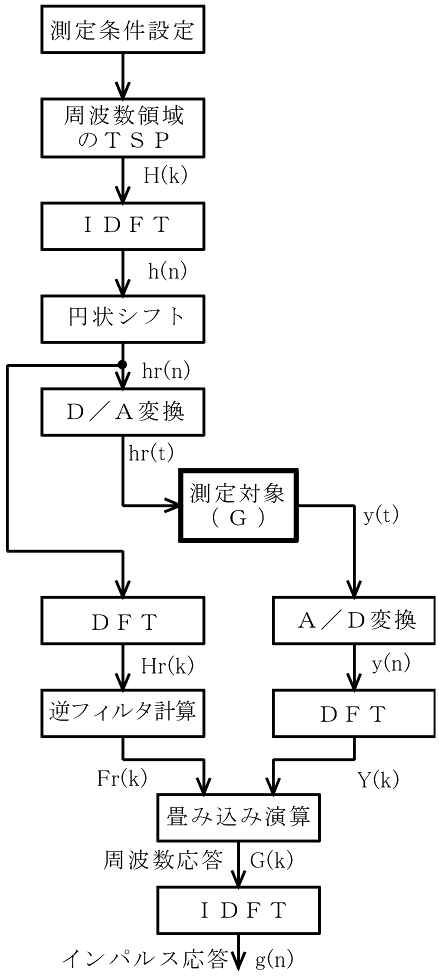

図5　TSPを用いた測定手順

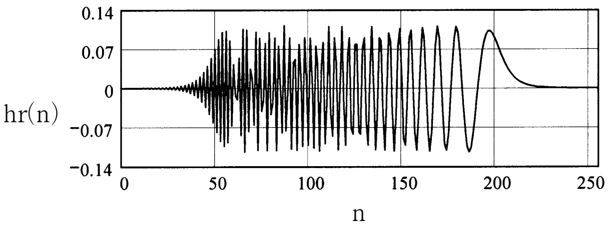

図6　図4をデータ数50分円状シフトしたTSP波形

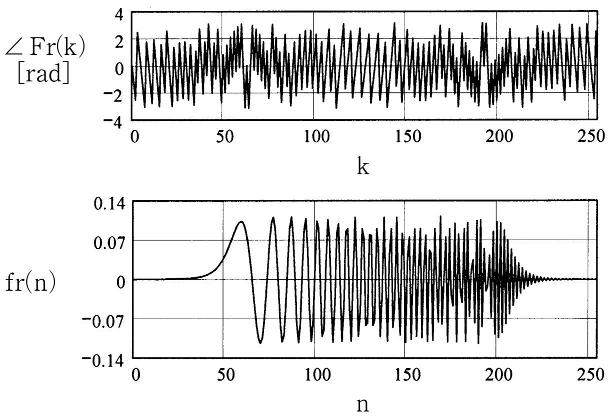

図7　図6の逆フィルタ（上段：周波数領域下段：時間領域）

応答g(n)である．

以下には各ブロックの詳細を数値計算と共に説明する．なお，計算には数値計算プログラムMathcadを用い，プログラムリストを付録につけた．

3.1　TSPの測定条件

最初に決めるべき条件はA/D，D/A変換のサンプリング周波数fsである．fsは(測定対象が応答する周波数の最大値の2倍という)標本化定理に従って決めるのが一般的であるが，測定対象の最大周波数の決め方が課題として残っている．別の考え方では，図5のA/D変換の前に低域通過フィルタを入れ，その遮断周波数の2倍をfsにする方法もある．この場合，実際のフィルタは理想的な遮断にならないので，遮断周波数の決め方が課題として残る．

次に全体の測定時間Tを決める．その目安としては，インパルス応答やステップ応答が十分静定するまでの時間を考える．TはTSP全体の長さだから，全データ数N＝T･fsである．一般的には，Nを2のべき乗にすることが多いので，その場合は値が大きい方で一番近い2のべき乗値にする．パルス引き延ばし係数mは前述の(5)式の範囲で決めるが，実効パルス幅は大きい方が望ましい．

H(k)とh(n)の計算例は前記の図4である．

3.2　円状シフトと逆フィルタ

図4のh(n)は信号の始めと終わりが0にならないので測定には適さない．そこで，始めと終わりが0に収束するように，図4をデータ数50だけ左方向に円状シフトして得られた波形hr(n)を図6に示す．このhr(n)が測定に使用するTSP信号である．

次に畳み込み演算に用いる逆フィルタFr(k)を作るため，hr(n)を離散フーリエ変換したHr(k)を使って次の式を計算する．

$$\mathrm{Fr}(k)=\frac{1}{\mathrm{Hr}(k)}\qquad \text{または}\quad \mathrm{Fr}(k)=\mathrm{Hr}^{*}(k) \tag{8}$$

このようにして，図6の逆フィルタを計算したFr(k)とそれを時間領域に変換したfr(n)(図5のフローにはない)を図7に示す．Fr(k)の絶対値はkに関わらず常に1なので，位相角のみを図の上段に示している．もとのTSPの位相角である図4の上段と比較すると，円状シフトした分は位相角の様子が変わっている．下段のfr(n)は，前章で述べたように図6の信号を右端から左方向に時間の流れを逆にした波形と一致していることが分かる．

3.3 測定と畳み込み

測定に使用するTSP信号hr(n)をD/A変換し，実時間信号hr(t)に変えて測定対象Gに入力する．理想的なD/A変換は高さが標本値に比例した幅のないパルス列を理想低域通過フィルタに通すことであるが，実際にはサンプリング周期の幅を持つ階段状波形にして出力することが多い．このときに保持効果などの問題が生じ易いので，参考文献[10]などに書かれている点に注意することと必要である．入力hr(t)を加えたときのGの出力y(t)をA/D変換して再び離散信号y(n)に変える．D/A変換とA/D変換のサンプリング周波数は同じであり，TSPの設計値としてはサンプリング周波数の1/2より高い周波数はy(t)に含まれていないはずである．しかし測定時のノイズなどにより高い周波数がy(t)に含まれる恐れがある場合は，A/D変換の前に低域通過フィルタ(遮断周波数はサンプリング周波数の1/2)の挿入などを行って，高い周波数の影響(エリアシング)を受けないようにする．

y(n)を離散フーリエ変換したY(k)と先の逆フィルタFr(k)を用いて次式の計算を行うと，周波数領域の畳み込み演算が行われて，測定対象の周波数応答G(k)が得られる．

$$G(k)=Y(k)\cdot Fr(k) \tag{9}$$

G(k)を離散フーリエ逆変換すると，測定対象のインパルス応答g(n)がえられる．図5において測定対象Gを1，すなわちy(n)＝hr(n)とすると，Y(k)＝Hr(k)となり，(9)式はG(k)＝Hr(k)･Fr(k)＝1となって，当たり前にg(n)は理想的なインパルス応答になる．これは(9)式が円状畳み込みになっているために，計算上理想的な結果が得られるようになる．厳密な評価は，時間領域の直線状畳み込みによって行われるべきであり，参考文献[4)～7)]で詳細な計算と，最適なTSPが検討されている．

4. あとがき

音響システムの分野において考案され実用化されている，TSPを用いたインパルス応答の測定方法について，文献を調査し実際の使用方法をまとめると共に若干の計算例を示した．この測定方法は制御システムにおける伝達関数すなわち周波数応答の測定にも使用できる有用な方法と思われる．実際の測定に使用した場合にはノイズが重畳されるので，測定パラメータなどを工夫することが必要になってくるが，それらはその時々の状況に応じて判断せざるを得ないことが多いと思われる．その意味で今後は実際の測定を行い，そのデータに基づいて検討して行きたい．

参考文献

1) N. Aoshima, "Computer-generated pulse signal applied for sound measurement", J. Acoust. Soc. Am. Vol.69, No.5, pp.1484-1488(1981).
2) 青島伸治, "パーソナルコンピュータを利用した信号圧縮法によるパイプ内音場の測定", 日本音響学会誌，40巻，3号，pp.146-151(1984).
3) 川浦淳一，鈴木陽一，曽根敏夫，相馬次郎，"ディジタル信号処理を用いた音響系の模擬法について"，日本音響学会誌，42巻，10号，pp.774-779(1986).
4) 鈴木陽一，浅野太，曽根敏夫，"音響系の伝達関数の模擬をめぐって(その1)"，日本音響学会誌，44巻，12号，pp.936-942(1988).
5) 鈴木陽一，浅野太，曽根敏夫，"音響系の伝達関数の模擬をめぐって(その2)"，日本音響学会誌，45巻，1号，pp.44-50(1989).
6) 鈴木陽一，浅野太，金学胤，曽根敏夫，"時間引き延ばしパルスの設計法に関する考察"，信学技法，EA92-86，pp.17-24(1992-12).
7) Y. Suzuki, F. Asano, H. Y. Kim, T. Sone, "An optimum computer-generated pulse signal suitable for the measurement of very long impulse response", J. Acoust. Soc. Am. Vol.97, No.2. pp.1119-1123(1995).
8) 浅野太，"TSPの概要"，ホームページ，http://asano.media-interaction.jp/English/doc/tsp/index.htm
9) 佐藤史明，"室内音響インパルス応答の測定技術"，日本音響学会誌，58巻，10号，pp.669-676(2002).
10) 金田豊，"ディジタル信号処理の基礎"，日本音響学会第72回技術講習会テキスト，(2001-11).
11) 大賀寿郎，山崎芳男，金田豊，"音響システムとディジタル処理"，電子情報通信学会，pp.51(1995).

付　録

数値計算のプログラム

【　】：コメント

【1. TSPの計算】

$N := 256 \qquad m := 80 \qquad \alpha := 4 \cdot m \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^2$

【計算条件－記号の説明】
N:データ数(標本数)　m:時間引き延ばし係数
k:離散周波数の変数　n:離散時間の変数

$k := 0 .. \frac{N}{2} \qquad H_k := e^{\alpha \cdot k^2 \cdot i}$

$k := \frac{N}{2} + 1 .. N - 1 \qquad H_k := e^{-\alpha \cdot (N-k)^2 \cdot i}$

【TSP計算式－式の説明】
(変数を示す添え字は省略)
H:周波数領域のTSP　Hθ:Hの偏角
h:Hの逆DFT(複素数)
hR:hの実数部　hI:hの虚数部

$k := 0 .. N - 1 \qquad H\theta_k := \arg(H_k)$

【$H\theta_k$のグラフ－本文図4上段】

$h := \frac{1}{N} \cdot \mathrm{ICFFT}(H)$

【DFT計算式の説明】
組込関数の計算式はCFFTで1/Nを掛けているが，直接周波数を計算した今回はICFFTの時にそれを掛ける.

$n := 0 .. N - 1 \qquad hR_n := \mathrm{Re}(h_n) \qquad hI_n := \mathrm{Im}(h_n)$

【hR_nグラフ－本文図4下段】

【2. 円状シフト】

$rot := 50$

【計算条件，記号の説明】
rot:円状シフトのデータ数
(左方向=時間進めシフト)
hr:円状シフト後の(実際に使う)TSP
hR，hrI:hrの実数部と虚数部

$n := 0 .. N - 1 - rot \qquad hr_n := h_{n+rot}$

$n := N - rot .. N - 1 \qquad hr_n := h_{n-(N-rot)}$

$n := 0 .. N - 1 \qquad hrR_n := \mathrm{Re}(hr_n) \qquad hrI_n := \mathrm{Im}(hr_n)$

【hrR_nのグラフ－本文図6】

【3. 逆フィルタ】

【計算条件，記号の説明】
Hr:hrのDFT
Fr:Hrの逆フィルタの周波数関数(Hrの共役)
Frθ:Frの偏角，　fr:Frの逆DFT(複素数)
frR，frI:frの実数部と虚数部

$Hr := N \cdot \mathrm{CFFT}(hr)$

$k := 0 .. N - 1 \qquad Fr_k := \overline{Hr_k}$

$Fr\theta_k := \arg(Fr_k)$

【$Fr\theta_k$のグラフ－本文図7上段】

$fr := \frac{1}{N} \cdot \mathrm{ICFFT}(Fr)$

$n := 0 .. N - 1 \qquad frR_n := \mathrm{Re}(fr_n) \qquad frI_n := \mathrm{Im}(fr_n)$

【frR_nのグラフ－本文図7下段】

【4. 畳み込み】

【計算条件，記号の説明】
Hr，Fr:hr，frのDFT
G:HrとFrの円状畳み込み=周波数応答
g:GのIDFT=インパルス応答.
gR,gI:gの実数部と虚数部

$k := 0 .. N - 1 \qquad G_k := Hr_k \cdot Fr_k$

$g := \frac{1}{N} \cdot \mathrm{ICFFT}(G)$

$n := 0 .. N - 1 \qquad gR_n := \mathrm{Re}(g_n) \qquad gI_n := \mathrm{Im}(g_n)$