弾塑性遷移領域を考慮した突起接触モデルに関する研究

野々垣　稔　　森本 卓也*

An Asperity Contact Model of Rough Surfaces in Considering the Elasto-Plastic Transitional Regime

Minoru NONOGAKI and Takuya MORIMOTO

This paper presents an asperity contact model of rough surfaces in considering the elasto-plastic transitional regime. The dependence of the mean contact pressure and contact area of the single asperity on its contact interference in the elasto-plastic transitional regime is modeled by cavity model. Results obtained from the present model are compared with those calculated by the GW and CEB models. It is shown that smaller mean separation and larger real contact area than GW model at any given plasticity index and contact load. Based on the results comparison and analysis, the present model is shown to be more complete than both the CEB model and the GW model in describing the elasto-plastic contact phenomena between rough surfaces.

1．緒　言

接触する二粗面における摩擦，摩耗，潤滑，摩擦発熱などの諸問題に対する明瞭な理解を得るうえで，トライボロジーシステムに関する基礎的な特性である荷重と真実接触面積またはすきまとの関係を明らかにし，正確な粗面間の接触モデルを構築することは重要である．

粗面間の接触モデルとして，まず先駆的研究であるGreenwood - Williamsonの弾性接触モデル[1]（GWモデル）が発表され，その後，Changら[2]によって塑性変形する突起に体積保存則を適用した弾塑性接触モデル（CEBモデル）に拡張された．しかし，このCEBモデルには欠点が2つある．1つは降伏開始点において平均接触圧力が$0.4H$から$0.6H$に切り替わることである．ここで，Hは軟らかい面の硬さである．もう1つの欠点は完全弾性接触または完全塑性接触のどちらかの接触形態しかとらず，弾性領域から塑性領域への遷移領域がモデル化されていないことである．

本研究では弾塑性遷移領域が接触特性に及ぼす影響について調べることを目的として，弾塑性遷移領域を考慮した統計的突起接触モデルを検討した．弾塑性遷移領域における単一突起の平均接触圧力はJohnson[3]のCavityモデルにもとづいて食込み量を変数とした近似式で与えた．そして，本モデルを用いて3つの塑性指数での広範囲な荷重域におけるそれぞれの平均すきまと接触荷重との関係，および真実接触面積と接触荷重との関係を調べ，得られた結果はGWモデルおよびCEBモデルと比較して議論した．

2．単一突起の接触モデル

粗面間の接触モデルの先駆的研究として，簡潔な突起接触モデルであるGWモデルがある．現在，広く用いられている突起接触モデルのほとんどがGWモデルの考え方にもとづいている．これらのモデルは単一突起の変形特性と突起高さ分布に依存する．したがって，単一突起の変形特性と突起高さ分布が与えられれば粗面間の接触モデルを得ることができる．

単一突起の接触面積と接触荷重は食込み量 によって完全に決定される．この の大きさに応じて，突起は弾性接触，弾塑性接触，および完全塑性接触の形態をとる．本節ではこれらの接触形態について，単一突起における接触面積と接触荷重をそれぞれωの関数として与える．

2.1　弾性接触

食込み量 が十分に小さいとき，変形体平滑面は弾性的に変形する．半径Rの球と平面の弾性接触に関する

※大阪府立大学大学院工学研究科

Hertzの理論によると，接触面積$\bar{A}_e(\omega)$，接触荷重$\bar{F}_e(\omega)$，最大接触圧力P_m，および平均接触圧力P_aはそれぞれ次式で与えられる．

$$\bar{A}_e(\omega)=\pi R\omega \tag{1}$$

$$\bar{F}_e(\omega)=\frac{4}{3}ER^{1/2}\omega^{3/2} \tag{2}$$

$$p_m=\frac{3\bar{F}_e}{2\bar{A}_e}=\frac{2E}{\pi}\left(\frac{\omega}{R}\right)^{1/2} \tag{3}$$

$$p_a=\frac{2}{3}p_m=\frac{4E}{3\pi}\left(\frac{\omega}{R}\right)^{1/2} \tag{4}$$

ここで，等価縦弾性係数Eには次式の関係がある．

$$\frac{1}{E}=\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{5}$$

E_1，E_2とν_1，ν_2はそれぞれ縦弾性係数とポアソン比である．Taborは剛完全塑性体に関して$p_m=0.6H$または$p_a=0.4H$において塑性降伏が始まることを示した[4]．ここで，Hは軟らかい方の硬さで引張り降伏応力Yと$H\sim3Y$の関係がある．Hertzの平均接触圧力と降伏開始点の関係は平均接触圧力因子kを導入して$p_a=0.4H$と一般化して表され，降伏開始点（$\omega=\omega_1$）での平均接触圧力は

$$P_a=1.1Y \tag{6}$$

で与えられる[5]．式(4)と(6)より，臨界食込み量 は

$$\omega_1=\left(\frac{3\pi P_a}{4E}\right)^2R=\left(\frac{3.3\pi Y}{4E}\right)^2R \tag{7}$$

となる．$\omega<\omega_1$において変形体平滑面は弾性的に変形し，$\omega\geq\omega_1$において弾塑性的（$\omega_1<\omega<\omega_2$）もしくは完全塑性的（$\omega\geq\omega_2$）に変形する．

2.2　弾塑性接触

食込み量ωが$\omega_1\leq\omega<\omega_2$のとき，変形体平滑面は弾塑性変形する．この弾塑性接触下における全変形量は弾性変形と塑性変形の組み合わせから構成されるので，接触面積$\bar{A}_{ep}$と接触荷重$\bar{F}_{ep}$を食込み量ωの関数として理論的に与えることは非常に複雑になる．これは材料のひずみ硬化特性による影響を受けるためである．

Changら[2]は，体積保存則を用いた弾塑性変形する単一突起の接触モデルを提示した．このモデルによると，食込み量が臨界食込み量ω_1よりも小さければ単一突起は弾性的に変形し，大きければ単一突起は塑性的に変形する．塑性接触面積は体積保存則を適用して求められ，この状態下の単一突起の接触面積および接触荷重はそれぞれ

$$\bar{A}_{ep}=\pi R\omega\left(2-\frac{\omega_1}{\omega}\right) \tag{8}$$

$$\bar{F}_{ep}=kY\bar{A}_{ep} \tag{9}$$

で表される．このCEBモデルには2つの欠点がある．1つは降伏開始点において，平均接触圧力p_aが弾性領域から塑性領域で$1.2Y$から$1.8Y$へと切り替わるという平均接触圧力の不連続性である．もう1つは完全塑性領域において，有限要素解析[6, 7]や実験結果[5]によると平均接触圧力は$1.8Y$ではなく，$3Y$でなければならない点である．これらの欠点を克服するために，Chang[8]は弾塑性遷移領域における平均接触圧力因子 について，降伏開始点と完全塑性接触との間をωの関数として直線でつなぎ，次式のように修正した．

$$k=\frac{P_a}{Y}=\left[3+\left(\frac{2}{3}K-3\right)\frac{\omega_1}{\omega}\right] \tag{10}$$

しかしながら，この補間はFig.1に示すようにTabor[4]の実験結果よりも過大評価しており，また物理的根拠も適切でない．そこで，本研究では次に述べるJohnson[9]の理論解析にもとづき，平均接触圧力kを修正する．

Johnson[9]は球形空洞の押し広げに関する解析において，空洞を半球形状の核に置き換えたCavityモデル(Fig.2)を考えた．このモデルによると，接触端部の角度がβである剛体の鈍角円錐が弾塑性体に食い込む場合の平均接触圧力因子kは次式で与えられ$1.1Y<P_a<3y$の弾塑性域で成り立つ．

$$k=\frac{P_a}{Y}=1.52+\frac{2}{3}ln\left[\frac{(E/Y)\tan\beta+4(1-2\nu)}{6(1-\nu)}\right] \tag{11}$$

ここで，食込み量が突起先端の曲率に比べて十分に小さい場合には球形突起として扱うことができ，$\tan\beta=a/R$で置き換えることができる．また，aは接触半径で次のように求められる．核の体積保存則を考えると，

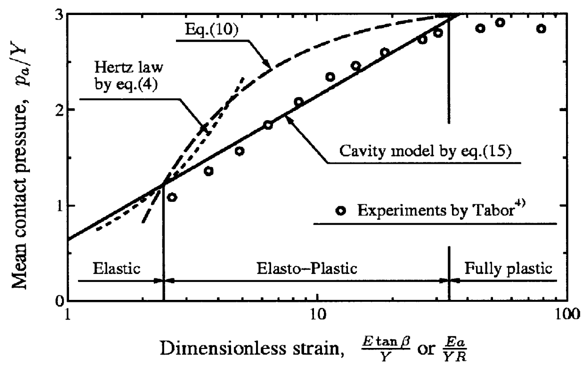

Fig1. Mean contact pressure vs. dimensionless strain in the elasto-plastic transitional regime

$$2\pi a^2 du(a) = \pi a^2 d\omega \tag{12}$$

となり，式(12)で左辺を差$a=R\omega$，右辺を$\omega=\omega_1$として積分すれば弾塑性域での接触半径aは次式のように求められる．

$$a = \sqrt{R\omega\left(2-\frac{\omega_1}{\omega}\right)} \tag{13}$$

したがって，接触面積 は

$$\bar{A}_e(\omega) = \pi R\omega\left(2-\frac{\omega_1}{\omega}\right) \tag{14}$$

となる．これは式(17)で与えられるCEBモデルのものと同じ形である．

ところで，平均接触圧力因子kを食込み量ωの関数として得るために，$\nu=0.3$として式(20)を次式のように近似しておく．

$$\mathrm{k} \approx 0.652 ln\left(\frac{E}{Y}\sqrt{\frac{2\omega-\omega_1}{R}}\right)+0.642 \tag{15}$$

式(15)を式(9)に代入して弾塑性接触での接触荷重は，

$$\bar{F}_e(\omega) = \left[0.652 ln\left(\frac{E}{Y}\sqrt{\frac{2\omega-\omega_1}{R}}\right)+0.642\right]Y\bar{A}_{ep} \tag{16}$$

となる．

本論文を通して，弾塑性接触下における単一突起の接触面積および接触荷重はそれぞれ式(14)と式(25)を用いる．

2.3 完全塑性接触

食込み量ωが増加してω_2以上となると，変形体平滑面は完全塑性変形する．このとき，変形体平滑面の平均圧力P_aは軟らかい面の硬さHに等しく，次式のように与えられる．

$$P_a = H \sim 3Y \tag{17}$$

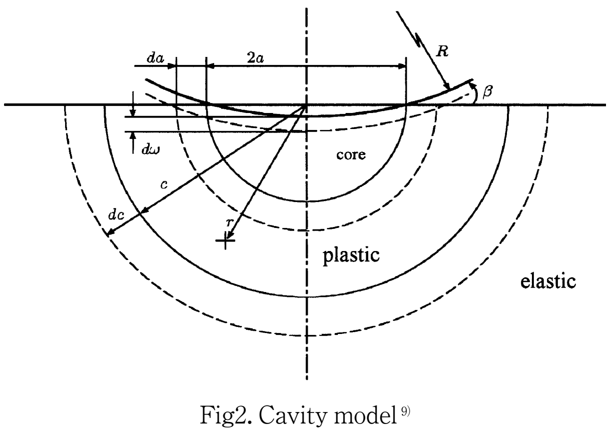

Fig2. Cavity model [9)]

Abbott とFirestone[10)] の塑性接触モデルによると，単一突起の接触面積$\bar{A}_p(\omega)$と接触荷重 はそれぞれ，

$$\bar{A}_p(\omega) = 2\pi \mathrm{R}\omega \tag{18}$$

$$\bar{F}_e(\omega) = H\bar{A}_p \tag{19}$$

となる．また，接触半径$\bar{a}_p$は次式のようになる．

$$\bar{a}_p = \sqrt{\bar{A}_p/\pi} = \sqrt{2R\omega} \tag{20}$$

完全塑性流動を生じる臨界食込み量ω_2の最小値はJohnson[3)] の実験結果によると$(Ea/YR)\approx 30$で生じ，ω_1とω_2の関係は次式のように得られる．

$$\omega_2 \geq 57\omega_1 \tag{21}$$

3 二粗面の接触モデル

前節において，接触形態の異なる単一突起の接触モデルを考えた．これらの単一突起の接触モデルを用いて二粗面の接触モデルを導くことができる．全真実接触面積A_tと全接触荷重F_tはそれぞれの接触形態での真実接触面積と接触荷重の和で表される．突起高さ分布の平均と真平面との距離がdであるとき，全真実接触面積と全接触荷重はそれぞれ次式のように表すことができる．

$$\begin{aligned}A_t(d) &= A_{et}(d)+A_{pt}(d)+A_{ept}(d)\\&= N\int_d^{d+\omega_1}\bar{A}_e\,\phi(z)dz+N\int_{d+\omega_2}^{\infty}\bar{A}_p\,\phi(z)dz\\&\quad +N\int_{d+\omega_1}^{d+\omega_2}\bar{A}_{ep}\,\phi(z)dz\\&= \eta A_n\pi R\int_d^{d+\omega_1}\omega\,\phi(z)dz+2\eta A_n\pi R\int_{d+\omega_2}^{\infty}\omega\,\phi(z)dz\\&\quad +\eta A_n\pi R\int_{d+\omega_1}^{d+\omega_2}(2\omega-\omega_1)\,\phi(z)dz\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}F_t(d) &= F_{et}(d)+F_{pt}(d)+F_{ept}(d)\\&= N\int_{d+}^{d+\omega_1}\bar{F}_e\,\phi(z)dz+N\int_{d+\omega_2}^{\infty}\bar{F}_p\,\phi(z)dz\\&\quad +N\int_{d+\omega_1}^{d+\omega_2}\bar{F}_{ep}\,\phi(z)dz\\&= \frac{4}{3}\eta A_n E R^{1/2}\int_d^{d+\omega_1}\omega^{3/2}\phi(z)dz+2\eta A_n HR\int_{d+\omega_2}^{\infty}\omega\,\phi(z)dz\\&\quad +\eta A_n\pi RY\int_{d+\omega_1}^{d+\omega_2}\left[0.652\,ln\left(\frac{E}{Y}\sqrt{\frac{2\omega-\omega_1}{R}}\right)+0.642\right]\\&\quad \times(2\omega-\omega_1)\,\phi(z)dz\end{aligned} \tag{23}$$

4　結果と議論

作成した弾塑性接触モデルを用いて接触荷重と塑性指数のすべての範囲について．粗面間の弾塑性接触特性を調べた．得られた結果はGWモデルとCEBモデルと比較して議論を行った．

4.1　計算条件

接触する二粗面がいずれも鋼である場合を考える．鋼の材料定数は縦弾性係数$E_1 = E_2 = 1.97 \times 10^{11} P_a$，ブリネル硬さ$H = 7.056 \times 10^9 P_a$，およびポアソン比$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$とした．突起高さ分布は突起の最大高さが平均から$3\sigma'$であるガウス分布と仮定すると，無次元化された突起高さ分布$\phi^*(z^*)$は次式で表される．

$$\phi^*(z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2} z^{*2}\right) \tag{24}$$

表面粗さはαとσ/Rの2つのパラメータで表すことができる．また，表面粗さは突起接触の過酷度を示す塑性指数[4]によっても特徴づけられる．本論文では塑性指数を式(4)と式(7)から次式で定義する．

$$\Psi = \frac{3E}{\pi k H}\sqrt{\frac{\sigma'}{R}} \tag{25}$$

ここで，kの値は0.4とした．(E/H)と$\sqrt{\sigma'/R}$はそれぞれ表面因子および材料因子と呼ばれる．塑性指数はαとσ'/Rが与えられると式(25)から計算することができ，Table.1には$\alpha = 0.04$について3種類の表面因子とこれらに対応する塑性指数の値も示している．表面因子の値はChangら[11]の文献から引用したものである．単一突起が完全塑性流動を生じる食込み量ω_2は式(21)より$\omega_2 = 57\omega_1$とした．

Table.1 Plasticity indindices and surface factors for $\alpha = 0.04$

σ'/R	Ψ
1.92×10^{-3}	0.7
3.91×10^{-3}	1.0
2.44×10^{-2}	2.5

4.2　無次元すきまと無次元荷重との関係

Fig.3は塑性指数Ψが0.7，1.0，および2.5の値に関する無次元すきまh/σ'と無次元荷重F_t/A_nEとの関係をそれぞれ示している．比較するために，GWモデルとCEBモデルによる推定値も同図に示している．

$\Psi = 0.7$の場合では，本モデルの無次元すきまはGWモデルとほぼ一致している．$F_t/A_nE = 10^{-3}$付近の高荷重域でのみ，わずかにGWモデルよりも小さい．この結果は大部分の突起の接触形態が弾性的であり，高荷重域では弾塑性域の初期段階であることを示している．一方，高荷重域におけるCEBモデルでの無次元すきまはGWモデルよりも大きくなっている．これは本来，突起の接触形態が弾塑性域の初期段階であるはずが塑性接触として取り扱われている結果である．

$\Psi = 1.0$の場合では，$F_t/A_nE = 10^{-3}$付近から本モデルの無次元すきまはGWモデルよりも小さくなっている．この結果は荷重の増加に伴って，弾塑性接触している突起よりも弾塑性接触している突起が増加していることを示している．一方，CEBモデルの無次元すきまはGWモデルよりも大きくなっており，特に荷重の増加に伴ってその差も大きくなっている．これは$\Psi = 0.5$の場合と同様で，突起の接触形態が弾塑性域の初期段階であるはずが塑性接触として取り扱われ，さらに弾塑性接触している突起が増加した結果である．

$\Psi = 2.5$の場合では，本モデルの無次元すきまは全荷重域でGWモデルよりも大きくなっている．この結果は軽荷重域から大部分の突起の接触形態が弾塑性域の後期段階または完全塑性域であることを示している．一方，CEBモデルの無次元すきまは本モデルよりも大きくなっており，荷重の増加に伴って本モデルとの差が小さくなっている．これは突起の接触形態が弾塑性域の後期段階または完全塑性域にあるはずが塑性接触として取り扱われた結果である．

弾性領域から塑性領域へと接触形態が変わるとき，CEBモデルの平均接触圧力は$0.4H$から$0.6H$に切り替わり，また食込み量に対する接触面積の増加の割合$dA/d\omega$もπRから$2\pi R$へと切り替わる．これらの不連続性の結果，平均接触圧力の増加に伴って，CEBモデルの無次元すきまはGWモデルや本モデルよりも過大に見積もる傾向がある．この影響は$\Psi = 1.0$で顕著に表れており，低荷重域にも影響を及ぼしている．それに対して，本モデルは各々の塑性指数において，低荷重域ではGWモデルとほぼ等しく，また高荷重域では弾塑性的に接触している突起の効果を正当に推定している．

4.3　真実接触面積と無次元荷重との関係

Fig.4は塑性指数Ψが0.7，1.0および2.5の値に関する真実接触面積A_t/A_nと無次元荷重F_t/A_nEとの関係を示している．いずれのモデルにおいても両対数グラフ上で線形関係がある．塑性指数が$\Psi = 0.7$の場合では本モデルの真実接触面積はGWモデルとほぼ一致し，高荷重域ではわずかに大きくなっている．一方，CEBモデルの真実接触面積はGWモデルよりも小さくなっている．塑性指

数が$\Psi=1.0$の場合では，本モデルの真実接触面積はGWモデルやCEBモデルよりも大きくなっており，荷重の増加に伴ってCEBモデルとの差が大きくなっている．一方，CEBモデルの真実接触面積はGWモデルよりも小さくなっている．$\Psi=2.5$の場合では，本モデルの真実接触面積はGWモデルよりも大きくなっており，荷重の増加に伴ってCEBモデルの値との差が小さくなっている．一方，CEBモデルは荷重の増加に伴ってGWモデルよりも大きくなっている．

$\Psi=0.7$の場合のような低い塑性指数のとき，高荷重域でさえ突起の少数部が弾塑性的に接触している．したがって，接触面積はGWモデルに比べてわずかに大きくならなければならない．また，$\Psi=2.5$の場合のような高い塑性指数のとき，より多くの突起が弾塑性的に変形し，塑性域へと遷移する．これらの真実接触面積の増加は大きなすきまによる突起の減少よりも十分に大きく，GWモデルに比べて真実接触面積は大きくならなければならない．しかし，CEBモデルはp_aと$dA/d\omega$の不連続性により，真実接触面積を不適切に導いている．それに対して，本モデルの真実接触面積は定性的に妥当である．

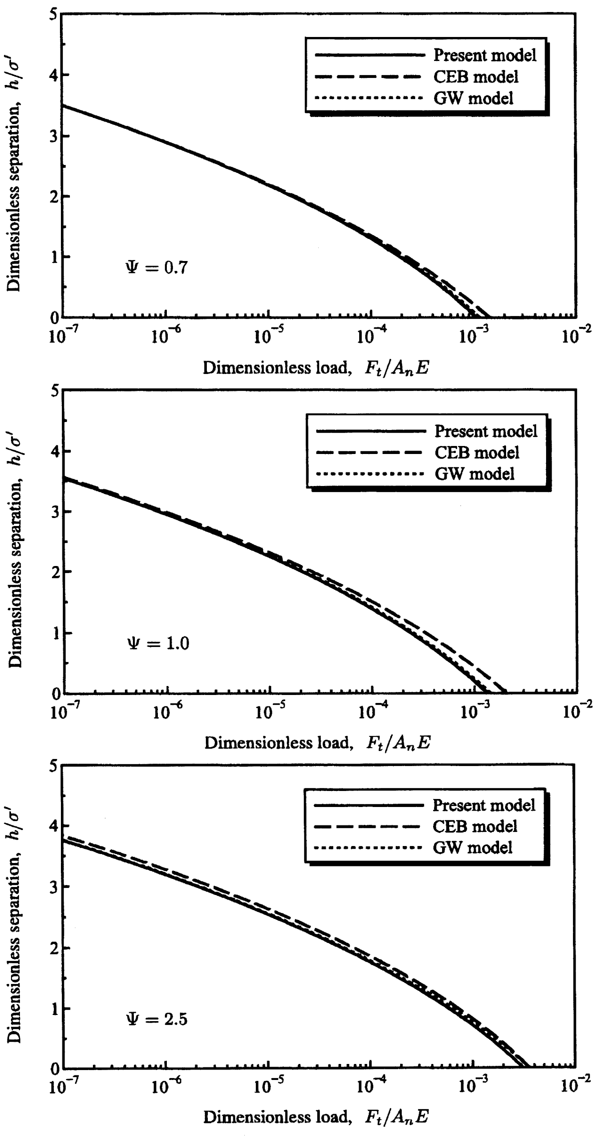

Fig.3 Dimensionless separation vs. dimensionless load

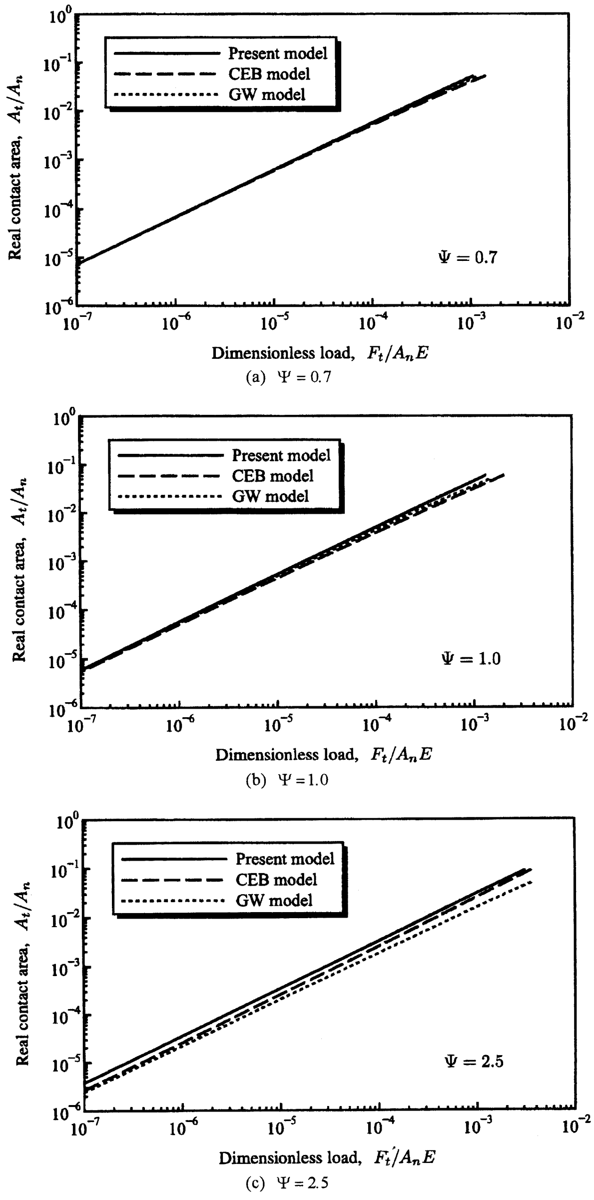

Fig.4 Real contact area vs. dimensionless load

5 結 言

弾塑性遷移領域が接触持性に及ぼす影響について調べることを目的として，弾塑性遷移領域を考慮した統計的突起接触モデルを提示した．弾塑性遷移簡域における単一突起の平均接触圧力はCavityモデルにもとづいて食込み量ωを変数とした近似式で与えた．本モデルを用いて3つの塑性指数での広範囲な荷重域におけるそれぞれの平均すきまと接触荷重との関係，および真実接触面積と接触荷重との関係を調べ，GWモデルおよびCEBモデルと比較した．その結果，以下のことが明らかになった．

(1) 各々の塑性指数での全荷重域において，本モデルで推定したすきまはGWモデルの推定値よりも小さく，また真実接触面積はGWモデルの推定値よりも大きい．
(2) 本モデルはCEBモデルの欠点を克服したより正確な二粗面の弾塑性接触モデルであり，精度の高い接触特性の推定が可能である．

謝 辞

本研究を遂行するにあたり，有益なるご助言を頂きました東京工業大学の中原 綱光 教授ならびに田中 智久 助手に深く感謝いたします．

参考文献

1) Greenwood, J. A. and Williamson, J. B. P., Contact of Nominally Flat Surface, Proc. Roy. Soc., A295 (1966) pp.300-319.
2) Chang, W. R., Etsion, I. And Bogy, D. B., An Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces, ASME Journal of Tribology, 110 (1987) pp.257-263.
3) Johnson, K. L., Contact Mechanics, Cambridge Univer-sity Press, Cambridge, (1985).
4) Tabor, D., The Hardness of Metals, Oxford University Press, (1951).
5) Handzel-Powierza, Z., Klimczak, T. and Polijaniuk, A., On the Experimental Verification of the Greenwood-Williamson Model for the Contact of Rough Surfaces, Wear, 154 (1992) pp.1-11.
6) Kucharski, S., Klimczak, T., Palijaniuk, J. and Kaczmarek, J., Finite Element Model for the Contact of Rough Surfaces, Wear, 177 (1994) pp.1-13.
7) Hardy, C., Baronet, C. N., and Tordion, G. V., The Elastic-Plastic Indentation of a Half-Space by a Rigid Sphere, Int. J. Numer. Methods Eng., 3 (1971) pp.451-462.
8) Chang, W. R., An Elastic-Plastic Contact Model for a Rough Surface with An Ion-Plated Soft Metallic Coating, Wear, 212 (1997) pp.229-237.
9) Johnson, K. L., The Correlation of Indentation Experi-ments, J. Mech. Phys. Sol.,18 (1970) pp.115-126.
10) Quantity a method based on accurate measure-ment and comparison, ASME Mech. Eng., 55 (1933) p.569.
11) Chang, W. R., Etsion, I. and Bogy. D. B., Adhesion Model for Metallic Rough Surfaces, ASME Journal of Tribology, 110 (1988) pp.50-56.